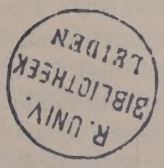
Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 5., S. 132—205 (1959)

ENTSCHEIDBARKEIT UND VOLLSTÄNDIGKEIT DER ELEMENTAREN HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE[1])

Von WOLFRAM SCHWABHÄUSER in Berlin

Promotion 10. 6. 1960 Humboldt Univ Berlin



Sept '60
ontv

493/60

Einleitung

Für die *elementare euklidische Geometrie* habe ich in meiner Diplomarbeit (s. [13]) die Vollständigkeit durch Rückführung auf die von TARSKI (s. TARSKI [14]) bewiesene Vollständigkeit der *elementaren Arithmetik der reellen Zahlen* (ARZ) gezeigt. Dabei ergab sich noch einmal die schon von TARSKI stammende Rückführung des Entscheidungsverfahrens auf sein Entscheidungsverfahren für die ARZ; außerdem gelang mir eine algebraische Charakterisierung der Modelle der elementaren euklidischen Geometrie.

In der vorliegenden Arbeit werden völlig analoge Untersuchungen für die *elementare hyperbolische Geometrie* (EHG) des (dreidimensionalen) Raumes angestellt und entsprechende Resultate erzielt. Um diese Arbeit jedoch unabhängig von der früheren ([13]) verständlich zu machen, müssen einige Wiederholungen von Teilen der früheren Arbeit in Kauf genommen werden.

Der zugrunde gelegte Formalismus der EHG und der der ARZ sind in der Art aufgebaut, wie ich es am Institut für Mathematische Logik der Humboldt-Universität zu Berlin kennenlernte. Diese Formalismen werden zunächst in den ersten beiden Paragraphen beschrieben.

Der Aufbau der EHG geschieht im Rahmen eines mehrsortigen Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Identität[2]). Die Ausdrucksmittel der EHG sind die gleichen wie in der elementaren euklidischen Geometrie, d. h., es werden Variablen für Punkte, Geraden und Ebenen und die Grundbeziehungen des HILBERTschen Axiomensystems (s. HILBERT [6]) verwendet. Das in [13] verwendete Axiomensystem für die elementare euklidische Geometrie, das ich im wesentlichen aus den Vorlesungen von Herrn Prof. Dr. KARL SCHRÖTER übernommen hatte, schloß sich an HILBERTS Axiomensystem an; die HILBERTschen Axiome (die auch Variablen für Halbstrahlen, natürliche Zahlen und Mengen enthalten) waren nur so umgeformt und zum Teil abgeschwächt, daß sie sich in unserem Formalismus ausdrücken ließen. Für die EHG wurden nun dieselben Axiome mit Ausnahme des Parallelenaxioms verwendet, und das letztere wurde einfach durch seine Ver-

---

[1]) Diss. Humboldt-Universität Berlin, 1959. Referenten: Prof. Dr. KARL SCHRÖTER und Prof. Dr. KURT SCHRÖDER. Über die Ergebnisse dieser Arbeit wurde auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1957 in Dresden berichtet.

[2]) Siehe A. SCHMIDT [9].

neinung (bzw. eine dazu äquivalente Aussage) ersetzt. Daraus, aus der Vollständigkeit der elementaren euklidischen und der der elementaren hyperbolischen Geometrie (bei Zugrundelegung dieser Axiomensysteme) ergibt sich noch, daß diese beiden Theorien die einzigen echten widerspruchsfreien Erweiterungen[1]) der sog. (elementaren) absoluten Geometrie (mit derselben Ausdrucksbestimmung) sind, anders gesagt, daß die absolute Geometrie nur in diese beiden Theorien gabelbar ist.

Im Aufbau der ARZ ergeben sich gegenüber der früheren Arbeit keinerlei Änderungen. Nach der Beschreibung der ARZ werden in § 2 die Ergebnisse aus TARSKI[14] zitiert, die später benötigt werden.

In § 3 werden zu gewissen Aussagen der EHG, die nur Punktvariablen enthalten und auf die man sich wie in der euklidischen Geometrie für den Vollständigkeitsbeweis von vornherein beschränken kann, gewisse ihnen entsprechende Aussagen der ARZ, ihre „arithmetischen Reduzierten", konstruiert und umgekehrt zu den Ausdrücken der ARZ gewisse entsprechende Ausdrücke der EHG, ihre „geometrischen Reduzierten". Mit Hilfe dieser Reduziertenbildungen wird die Vollständigkeit der EHG auf die Vollständigkeit der ARZ zurückgeführt.

Neben anderen einfachen Folgerungen aus dem Vollständigkeitsbeweis ergibt sich in § 4 die Entscheidbarkeit der EHG. Außerdem werden dort die Modelle der EHG (die ja als elementare Theorie nicht kategorisch ist) algebraisch charakterisiert.

Für die angestellten Untersuchungen über die EHG ist die EHG selbst erst genügend weit zu entwickeln, d. h., es ist eine Reihe von Ausdrücken aus dem Axiomensystem abzuleiten oder, was auf dasselbe hinausläuft, eine Reihe von Sätzen der EHG aus den Axiomen zu beweisen. Aus den Überlegungen in § 3 ergibt sich ziemlich zwangsläufig, welche geometrischen Sätze dafür zu beweisen sind. Diese Sätze beziehen sich zum Teil auf die eigens zum Vollständigkeitsbeweis eingeführten Begriffsbildungen, so daß sie kaum schon in anderem Zusammenhang bewiesen worden sein dürften, obwohl die hyperbolische Geometrie sonst ein recht gut bekanntes Gebiet der Mathematik ist. Um den Gang der allgemeinen Überlegungen nicht zu sehr zu stören, wurden die Beweise für diese Sätze zurückgestellt und in § 5 zusammengefaßt.[2]) Dagegen wurden die benötigten Definitionen für eine Reihe bekannter Begriffsbildungen der hyperbolischen Geometrie und einige Sätze darüber schon am Schluß von § 1 untergebracht.

---

[1]) „extensions" im Sinne von TARSKI[16].

[2]) In einer Arbeit von P. SZÁSZ, Unmittelbare Einführung WEIERSTRASSscher homogener Koordinaten in der hyperbolischen Ebene auf Grund der HILBERTschen Endenrechnung (Acta Math. Acad. Sci. Hung. **9**, S. 1—28 (1958)), die mir bei Abschluß meiner Arbeit noch nicht zugänglich war, werden zum Zwecke eines „independenten Aufbaus der hyperbolischen Geometrie" Sätze bewiesen, die sich anscheinend auch auf den Raum übertragen und dann an Stelle der Sätze des § 5 zum Vollständigkeitsbeweis für die EHG verwenden lassen, wenn man eine andere Konstruktion einer arithmetischen Reduzierten benutzt. Umgekehrt läßt sich § 5 als eine andere Art des independenten Aufbaus der hyperbolischen Geometrie auffassen.

6493/60

Übrigens kann man die Ergebnisse dieser Arbeit auch auf die elementare *hyperbolische Geometrie der Ebene* (zweidimensionale hyperbolische Geometrie) übertragen. Die dazu erforderlichen Abänderungen der Untersuchung sind jedoch so leicht zu übersehen, daß diese Übertragung hier nicht ausgeführt zu werden braucht.

Herrn Prof. Dr. SCHRÖTER und Herrn Dr. GÜNTER ASSER bin ich für ihr Interesse und ihre Ratschläge bei der Entstehung dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

§ 1. Die formalisierte elementare hyperbolische Geometrie (EHG)

1. Ausdrucksbestimmung[1])

In der EHG verwenden wir drei Sorten von (*Individuen-*) *Variablen*, nämlich die Variablen $A_0, A_1, A_2, \ldots$ für Punkte, die Variablen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ für Geraden und die Variablen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ für Ebenen. Im folgenden soll der Buchstabe v stets eine Variable bedeuten.

Die *prädikativen Ausdrücke* (d. h. die einfachsten Ausdrücke) der Theorie sind die Zeichenreihen der Form $A_i = A_j, a_i = a_j, \alpha_i = \alpha_j, Inz\, A_i a_j, Inz\, A_i \alpha_j, Zw\, A_i A_j A_k$, $A_i A_j \underset{s}{\equiv} A_k A_l$, $A_i A_j A_k \underset{w}{\equiv} A_l A_m A_n$ (wobei i, j, k, l, m, n natürliche Zahlen[2]) sind).

Das Gleichheitszeichen wird hierbei für die Identität verwendet, *Inz* bedeutet die Verknüpfung (oder Inzidenz), *Zw* die Zwischenbeziehung, $\underset{s}{\equiv}$ die Streckenkongruenz und $\underset{w}{\equiv}$ die Winkelkongruenz im Sinne von HILBERT [6].

Aus den prädikativen Ausdrücken werden beliebige *Ausdrücke* mit Hilfe der „logischen Konstanten" $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$ (für „nicht", „und", „oder", „wenn — so", „genau dann — wenn", „für jedes", „es gibt ein") und der Klammern (,) „prädikatenlogisch aufgebaut", d. h. wie im Prädikatenkalkül der ersten Stufe zusammengesetzt.[3]) Der Buchstabe H soll im folgenden stets einen Ausdruck der EHG bedeuten.

Die Ausdrücke, die keine freien[4]) Variablen enthalten, nennen wir *Aussagen*.

Mit $H(v)$ wollen wir stets einen Ausdruck bezeichnen, in dem die Variable v vollfrei[4]) vorkommt. Falls v' nicht gebunden in $H(v)$ vorkommt und mit v von derselben Sorte ist, so bezeichnen wir den Ausdruck, der aus $H(v)$ dadurch entsteht, daß an Stelle der Variablen v überall die Variable v' eingesetzt wird, mit $H(v')$ oder genauer mit $H(v\,|\,v')$. Sodann verwenden wir $\exists!\, v H(v)$ als Abkürzung für $\forall v \forall v' \left((H(v) \wedge H(v')) \rightarrow v = v'\right)$ („es gibt höchstens ein v mit $H(v)$") und $\exists!!\, v H(v)$ als Abkürzung für $\left(\exists v H(v) \wedge \exists!\, v H(v)\right)$ („es gibt genau ein v mit $H(v)$"). Dabei soll v' eine Variable derselben Sorte wie v sein, die nicht in $H(v)$ vorkommt, der Eindeutigkeit der Definition wegen etwa die Variable dieser Art mit kleinstem Index.

---

[1]) Die Ausdrucksbestimmung verläuft genauso wie in [13], so daß der damit vertraute Leser diesen Abschnitt (und ebenso den ersten Teil des folgenden) überschlagen kann.

[2]) 0 wird hier und im folgenden zu den natürlichen Zahlen gerechnet.

[3]) Vgl. dazu SCHRÖTER [11] S. 62ff. oder ASSER [2] S. 5ff. wie überhaupt zum Aufbau des Prädikatenkalküls.

[4]) Vgl. etwa SCHRÖTER [11] oder ASSER [2].

Wenn wir es nicht mit strukturellen Überlegungen über Ausdrücke zu tun haben, sondern nur konkrete Ausdrücke aufschreiben, wollen wir uns einer Reihe weiterer Vereinfachungen bedienen. So verwenden wir als Punktvariablen große lateinische Buchstaben ohne und mit irgendwelchen Indizes, als Geradenvariablen entsprechend kleine lateinische Buchstaben und als Ebenenvariablen kleine griechische Buchstaben. Weiter lassen wir wie üblich Klammerpaare in einem Ausdruck weg, wenn sein Aufbau auch ohne diese zu erkennen ist bei Beachtung der Verabredung, daß einer der Funktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ stets stärker trennt als die vorangehenden (in dieser Reihenfolge). Sodann schreiben wir $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ als Abkürzung für $\big((\cdots(H_1 \wedge H_2) \wedge \cdots) \wedge H_n\big)$ und $H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_n$ für $\big((\cdots(H_1 \vee H_2) \vee \cdots) \vee H_n\big)$. Diese „allgemeine Konjunktion" bzw. „allgemeine Alternative" bezeichnen wir noch kürzer mit $\bigwedge_{\nu=1}^{n} H_\nu$ bzw. $\bigvee_{\nu=1}^{n} H_\nu$. Auch Bildungen wie $\bigwedge_{\nu=i,j,\ldots,l} H_\nu$ (für die allgemeine Konjunktion von $H_i, H_j, \ldots, H_l$) werden verwendet. Für die Verschiedenheit verwenden wir schließlich das Zeichen $\neq$, schreiben also $v_1 \neq v_2$ für $\sim v_1 = v_2$.

Gelegentlich wollen wir unseren Formalismus durch Hinzunahme des (dritten) Quantifikators ι für den *bestimmten Artikel* in bekannter Weise erweitern.[1])

2. Interpretation

Für die Interpretation der konstruierten Ausdrücke ist vor allem der Begriff der *Erfüllung* eines Ausdrucks H durch eine Belegung f über einer Geometrie $\mathfrak{G}$ zu erklären. Unter einer *Geometrie* $\mathfrak{G}$ verstehen wir dabei eine der Ausdrucksbestimmung adäquate Struktur[2]), d. h. eine Struktur, die festgelegt ist durch drei nicht leere Mengen (die „Menge der Punkte", die „Menge der Geraden" und die „Menge der Ebenen von $\mathfrak{G}$") und fünf Relationen (die „lineare Inzidenz [oder Verknüpfung]", die „ebene Inzidenz", die „Zwischenbeziehung", die „Streckenkongruenz" und die „Winkelkongruenz von $\mathfrak{G}$"), die den Zeichen $Inz, Inz, Zw, \underset{s}{\equiv}, \underset{w}{\equiv}$ in den letzten fünf Typen von prädikativen Ausdrücken (S. 134) entsprechen. Unter einer *Belegung* f über einer Geometrie $\mathfrak{G}$ verstehen wir eine Funktion, die jeder Punktvariablen einen Punkt von $\mathfrak{G}$, jeder Geradenvariablen eine Gerade von $\mathfrak{G}$ und jeder Ebenenvariablen eine Ebene von $\mathfrak{G}$ eindeutig zuordnet.

Die Erfüllung eines Ausdrucks durch eine solche Belegung ist dann folgendermaßen festgelegt. Die Belegung f über $\mathfrak{G}$ erfüllt eine Gleichung $v_1 = v_2$ genau dann, wenn die Individuen (Punkte, Geraden oder Ebenen von $\mathfrak{G}$) $f(v_1)$ und $f(v_2)$ identisch sind. f erfüllt einen anderen prädikativen Ausdruck genau dann, wenn die entsprechende Relation von $\mathfrak{G}$ zutrifft auf die Individuen, die den Variablen des Ausdrucks durch die Belegung f zugeordnet sind. Die Erfüllung der zusammengesetzten Ausdrücke ist wie im Prädikatenkalkül der ersten Stufe erklärt.[3]) Für die Erfüllung des Ausdrucks H durch die Belegung f über der Geometrie $\mathfrak{G}$ schreiben wir kurz $f\ Erf_{\mathfrak{G}}\ H$.

---

[1]) Vgl. dazu SCHRÖTER [10].

[2]) „possible realization" im Sinne von TARSKI [16] S. 8.

[3]) Vgl. dazu TARSKI [15] oder auch SCHRÖTER [11] S. 64ff. oder ASSER [2] S. 7.

Ein Ausdruck H heißt über der Geometrie $\mathfrak{G}$ *allgemeingültig* (geschrieben $ag_{\mathfrak{G}} H$), falls er von jeder Belegung über $\mathfrak{G}$ erfüllt wird. Über $\mathfrak{G}$ allgemeingültige Aussagen heißen auch *wahre Aussagen* über die Geometrie $\mathfrak{G}$.

Unter den Geometrien spielen im folgenden natürlich nur die sog. *Modelle* der EHG eine Rolle, d. h. diejenigen Geometrien, über denen sämtliche der weiter unten aufgestellten Axiome der EHG allgemeingültig sind. Bei unseren Betrachtungen bevorzugen wir ein bestimmtes Modell, nämlich das KLEINsche *Kugelmodell* $\mathfrak{K}_R$ über dem angeordneten Körper R der reellen Zahlen, d. h. das KLEINsche Modell mit der absoluten Fläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$[1]). Die Punkte dieses Modells sind die Punkte des dreidimensionalen Zahlenraumes R^3, die im Inneren der Kugel vom Radius 1 um den Punkt [0, 0, 0] (der „absoluten Fläche" oder „Eichfläche") liegen, d. h. die Tripel von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3 mit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$. Die Geraden dieses Modells sind die Geraden des R^3 (bei der üblichen [euklidischen] geometrischen Interpretation), auf denen wenigstens ein Punkt des Modells (d. h. des Kugelinneren) liegt, die Ebenen des Modells sind die Ebenen des R^3, auf denen wenigstens ein Punkt des Modells liegt. Die Inzidenzbeziehungen des Modells sind wie bei der üblichen geometrischen Interpretation des R^3 festgelegt, aber auf das Innere der absoluten Fläche eingeschränkt. Ebenso ist es mit der Zwischenbeziehung des Modells (ein Punkt liegt also zwischen zwei anderen, wenn er auf ihrer Verbindungsstrecke liegt, aber mit keinem von ihnen zusammenfällt). Unter *hyperbolischen Bewegungen* verstehen wir solche projektive Transformationen des R^3 (den wir uns bei Bedarf durch Hinzunahme einer uneigentlichen Ebene zu einem projektiven Raum ergänzt denken), die die absolute Fläche in sich überführen. Irgendwelche Figuren im Modell, insbesondere Strecken und Winkel, sind dann (hyperbolisch) kongruent, falls sie durch eine hyperbolische Bewegung ineinander übergeführt werden können.

Für Erfüllung und Allgemeingültigkeit über $\mathfrak{K}_R$ verwenden wir meist die kürzeren Bezeichnungen $fErfgH$ und $aggH$ an Stelle von $fErf_{\mathfrak{K}_R} H$ und $ag_{\mathfrak{K}_R} H$.

3. Beweisbarkeit

Einen Ausdruck H nennen wir aus einer beliebigen Menge X von Ausdrücken *ableitbar*, falls er aus den Elementen von X durch sukzessive Anwendung der üblichen Schlußregeln des Prädikatenkalküls[2]) erhalten werden kann.

Einen Ausdruck H nennen wir *beweisbar* (wir schreiben dafür $\vdash_g H$), falls er aus dem jetzt aufzustellenden Axiomensystem ax der EHG ableitbar ist. Ausdrücke H_1, H_2 mit $\vdash_g (H_1 \leftrightarrow H_2)$ nennen wir zueinander *äquivalent*.

Das Axiomensystem ax besteht aus den üblichen *logischen Axiomen*[3]) und den *eigentlichen Axiomen*, die in den folgenden fünf Axiomgruppen aufgeführt sind.

---

[1]) Vgl. HEFFTER [5] S. 135ff.
[2]) Siehe dazu [13] S. 141 und SCHRÖTER [11] S. 68.
[3]) Siehe etwa [13] S. 141f.

I. Axiome der Verknüpfung

A. Axiome der linearen Verknüpfung

1. $A \neq B \rightarrow \exists!!\, a(Inz\,A\,a \wedge Inz\,B\,a)$.
(Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.)
2. $\forall a \exists A \exists B(A \neq B \wedge Inz\,A\,a \wedge Inz\,B\,a)$.
(Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte.)
3. $\exists A \exists B \exists C \sim \exists a(Inz\,A\,a \wedge Inz\,B\,a \wedge Inz\,C\,a)$.
(Es gibt Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen.)

B. Axiome der ebenen Verknüpfung

1. $\sim \exists a(Inz\,A\,a \wedge Inz\,B\,a \wedge Inz\,C\,a) \rightarrow \exists!!\, \alpha(Inz\,A\,\alpha \wedge Inz\,B\,\alpha \wedge Inz\,C\,\alpha)$.
(Durch Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen, geht genau eine Ebene.)
2. $\forall \alpha \exists A\, Inz\,A\,\alpha$.
(In jeder Ebene gibt es wenigstens einen Punkt.)
3. $A \neq B \wedge Inz\,A\,a \wedge Inz\,B\,a \wedge Inz\,A\,\alpha \wedge Inz\,B\,\alpha \rightarrow \forall C(Inz\,C\,a \rightarrow Inz\,C\,\alpha)$.
(Wenn zwei Punkte einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in α.)
4. $\sim \exists A(Inz\,A\,\alpha \wedge Inz\,A\,\beta)$
$\vee \exists A \exists B(A \neq B \wedge Inz\,A\,\alpha \wedge Inz\,A\,\beta \wedge Inz\,B\,\alpha \wedge Inz\,B\,\beta)$.
(Ebenen α, β haben stets gar keinen oder wenigstens zwei Punkte gemeinsam.)
5. $\exists A \exists B \exists C \exists D \sim \exists \alpha(Inz\,A\,\alpha \wedge Inz\,B\,\alpha \wedge Inz\,C\,\alpha \wedge Inz\,D\,\alpha)$.
(Es gibt Punkte A, B, C, D, die nicht in einer Ebene liegen.)

II. Axiome der Anordnung

1. $Zw\,A\,B\,C \rightarrow \exists a(Inz\,A\,a \wedge Inz\,B\,a \wedge Inz\,C\,a) \wedge A \neq B \wedge A \neq C \wedge B \neq C$.
(Wenn B zwischen A und C liegt, so liegen A, B und C auf einer Geraden und sind paarweise verschieden.)
2. $Zw\,A\,B\,C \rightarrow \sim Zw\,A\,C\,B \wedge \sim Zw\,B\,C\,A$.
(Wenn B zwischen A und C liegt, so liegt C weder zwischen A und B noch zwischen B und A.)
3. $A \neq B \rightarrow \exists C\, Zw\,A\,B\,C$.
(Wenn A von B verschieden ist, so gibt es einen Punkt C, so daß B zwischen A und C liegt.)
4. $\sim \exists a(Inz\,A\,a \wedge Inz\,B\,a \wedge Inz\,C\,a) \wedge Inz\,A\,\alpha \wedge Inz\,B\,\alpha \wedge Inz\,C\,\alpha$
$\wedge \forall D(Inz\,D\,a \rightarrow Inz\,D\,\alpha) \wedge \sim Inz\,A\,a \wedge \sim Inz\,B\,a \wedge \sim Inz\,C\,a$
$\wedge \exists D(Inz\,D\,a \wedge Zw\,A\,D\,B)$
$\rightarrow \exists E(Inz\,E\,a \wedge Zw\,A\,E\,C) \vee \exists F(Inz\,F\,a \wedge Zw\,B\,F\,C)$.
(Axiom von Pasch: Wenn A, B, C in einer Ebene α aber nicht auf einer Geraden liegen, außerdem a in α liegt aber durch keinen der Punkte A, B, C geht und schließlich ein Punkt zwischen A und B auf a liegt, so liegt auf a auch ein Punkt zwischen A und C oder ein Punkt zwischen B und C.)

III. Axiome der Kongruenz

A. Axiome der Streckenkongruenz

1. $AB \underset{s}{\equiv} CD \rightarrow C \neq D$.
(Wenn AB kongruent CD ist, so sind C und D voneinander verschieden, bestimmen also eine Strecke.)
2. $AB \underset{s}{\equiv} EF \wedge CD \underset{s}{\equiv} EF \rightarrow AB \underset{s}{\equiv} CD$.
(„Drittengleichheit" für die Streckenkongruenz.)
3. $A \neq B \rightarrow AB \underset{s}{\equiv} BA$.
4. $A \neq B \wedge C \neq D \rightarrow \exists E(ZwCDE \wedge AB \underset{s}{\equiv} DE)$.
(Möglichkeit der Streckenabtragung: Auf einem von D ausgehenden Halbstrahl gibt es wenigstens einen Punkt E derart, daß eine vorgegebene Strecke AB kongruent DE ist.)
5. $AB \underset{s}{\equiv} A'B' \wedge BC \underset{s}{\equiv} B'C' \wedge ZwABC \wedge ZwA'B'C' \rightarrow AC \underset{s}{\equiv} A'C'$.
(Werden zwei Strecken durch je einen Punkt innen geteilt und sind die entsprechenden Teilstrecken kongruent, so sind es auch die ganzen Strecken.)

B. Axiome der Winkelkongruenz

1. $ABC \underset{w}{\equiv} A'B'C' \rightarrow \sim\exists a(InzA'a \wedge InzB'a \wedge InzC'a)$.
(Wenn ABC winkelkongruent $A'B'C'$ ist, so liegen A', B', C' nicht auf einer Geraden, bestimmen also einen Winkel.)
2. $A_1B_1C_1 \underset{w}{\equiv} A_3B_3C_3 \wedge A_2B_2C_2 \underset{w}{\equiv} A_3B_3C_3 \rightarrow A_1B_1C_1 \underset{w}{\equiv} A_2B_2C_2$.
(„Drittengleichheit" für die Winkelkongruenz.)
3. $\sim\exists a(InzAa \wedge InzBa \wedge InzCa) \rightarrow ABC \underset{w}{\equiv} CBA$.
(Bestimmen A, B und C einen Winkel, so ist ABC winkelkongruent CBA.)
4. $\sim\exists a(InzAa \wedge InzBa \wedge InzCa) \wedge (ZwBA'A \vee ZwBAA') \rightarrow ABC \underset{w}{\equiv} A'BC$.
(Bestimmen A, B und C einen Winkel und bestimmt A' denselben von B ausgehenden Halbstrahl wie A, so ist ABC winkelkongruent $A'BC$.)
5. $\sim\exists a(InzAa \wedge InzBa \wedge InzCa) \wedge \sim\exists a(InzA'a \wedge InzB'a \wedge InzC^*a)$
$\rightarrow \exists C'\exists\alpha\exists a(InzA'\alpha \wedge InzB'\alpha \wedge InzC^*\alpha \wedge InzA'a \wedge InzB'a$
$\wedge InzC'\alpha \wedge \sim\exists D(InzDa \wedge ZwC^*DC') \wedge ABC \underset{w}{\equiv} A'B'C'$
$\wedge \forall C''(InzC''\alpha \wedge \sim\exists E(InzEa \wedge ZwC^*EC'') \wedge ABC \underset{w}{\equiv} A'B'C''$
$\rightarrow C'' = C' \vee ZwB'C''C' \vee ZwB'C'C''))$.
(Möglichkeit und Eindeutigkeit der Winkelantragung:
Bestimmen A, B, C einen Winkel und liegen A', B', C^* nicht auf einer Geraden, so gibt es in der Halbebene, die von der Geraden a durch A' und B' begrenzt wird und durch C^* geht, einen Punkt C', so daß ABC winkelkongruent $A'B'C'$ ist, und jeder Punkt C'' mit derselben Eigenschaft bestimmt denselben von B' ausgehenden Halbstrahl wie C'.)
6. $AB \underset{s}{\equiv} A'B' \wedge AC \underset{s}{\equiv} A'C' \wedge BAC \underset{w}{\equiv} B'A'C' \rightarrow ABC \underset{w}{\equiv} A'B'C'$.
(Teil des ersten Kongruenzsatzes für Dreiecke.)

Die Axiomgruppen I bis III, die auch in [13] verwendet wurden, sind gleichwertig mit den entsprechenden Gruppen des HILBERTschen Axiomensystems (s. HILBERT [6] erstes Kap.). Während aber bei HILBERT die Strecken- und die Winkelkongruenz als Relationen zwischen Strecken bzw. Winkeln betrachtet werden, sind sie hier als Relationen (vier- bzw. sechsstellig) zwischen Punkten eingeführt, da Strecken und Winkel gar nicht als Grundgebilde in der EHG vorkommen. Deshalb treten hier auch einige Sätze, die bei HILBERT trivial sind, als Axiome auf (III A 1., 3., II B 1., 3., 4.).

IV. Das nichteuklidische Parallelenaxiom

$$\exists a \exists A \big(\sim InzAa \wedge \sim \exists! b (InzAb \wedge Ebab \wedge \sim \exists P (InzPa \wedge InzPb))\big).$$

(Es gibt eine Gerade a und einen Punkt A, so daß A nicht auf a liegt und wenigstens zwei Geraden b existieren, die durch A gehen, mit a in einer Ebene liegen und a nicht treffen [d. h., daß es nicht höchstens eine solche Gerade b gibt].)

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt: *a und b liegen in einer Ebene*:

$$Ebab \underset{\text{Df}}{=} \exists \alpha \big(\forall A (InzAa \to InzA\alpha) \wedge \forall B (InzBb \to InzB\alpha)\big).$$

Dieses Axiom ist die Verneinung des HILBERTschen Parallelenaxioms für die euklidische Geometrie, welches seinerseits mit dem in [13] (s. dort) verwendeten Parallelenaxiom äquivalent ist (bei Zugrundelegung der übrigen Axiome). Axiom IV. selbst ist somit äquivalent zur Verneinung des Parallelenaxioms aus [13].

V. Axiome der Stetigkeit

Darunter verstehen wir alle Ausdrücke der Form

$$\exists A^* \forall A \forall B \big(H_1(A) \wedge H_2(B) \to ZwA^*AB\big)$$
$$\to \exists A^* \forall A \forall B \big(A \neq A^* \wedge H_1(A) \wedge B \neq A^* \wedge H_2(B) \to ZwAA^*B\big),$$

wobei $H_1(A)$ und $H_2(B)$ beliebige Ausdrücke sind derart, daß A^*, B nicht in $H_1(A)$ und A^*, A nicht in $H_2(B)$ vorkommen. (Wenn es einen Punkt A^* gibt, so daß die Punkte A mit $H_1(A)$ zwischen A^* und den Punkten B mit $H_2(B)$ liegen, so gibt es einen Punkt A^*, der die Punkte A mit $H_1(A)$ von den Punkten B mit $H_2(B)$ „trennt", d. h. derart, daß für beliebige von A^* verschiedene Punkte A, B mit $H_1(A)$ und $H_2(B)$ stets A^* zwischen A und B liegt.)

Das ist wieder das in [13] verwendete, aus TARSKI [14] stammende unendliche Schema, eine Abschwächung der HILBERTschen Stetigkeitsaxiome, die aber wegen der Beschränkung unseres Formalismus auf die erste Stufe (d. h. auf eine elementare Theorie) unvermeidlich ist.

Die obige Definition des Ableitungsbegriffes wird gerechtfertigt durch das für jede Geometrie $\mathfrak{G}$ geltende (vgl. [13])

Theorem von der Deduktionserblichkeit der Allgemeingültigkeit:

Wenn jedes Element von X über $\mathfrak{G}$ allgemeingültig und H aus X ableitbar ist, so ist auch H über $\mathfrak{G}$ allgemeingültig.

Verwendet man jetzt als X das Axiomensystem ax der EHG, so erhält man die folgende Spezialisierung.

Theorem: *Wenn* $\mathfrak{G}$ *Modell der* EHG *ist und* $\vdash_g H$, *so* $ag_{\mathfrak{G}} H$.

Da das KLEINsche Modell $\mathfrak{K}_R$ bekanntlich ein Modell der EHG ist, gilt insbesondere das

Theorem von der inhaltlichen Widerspruchsfreiheit der EHG:
Wenn $\vdash_g H$, *so* $agg H$.

Die weiteren Untersuchungen dienen vor allem zum Beweis der Umkehrung dieses Theorems, des Theorems von der inhaltlichen Vollständigkeit der EHG.

Hierbei werden wir gelegentlich mit Vorteil den bestimmten Artikel verwenden. Zu seiner Einführung sind die Ausdrucksbestimmung und der Begriff der Beweisbarkeit in bekannter Weise zu erweitern[1]) (eine Interpretation dieses Formalismus ist für die hier angestellten Überlegungen nicht erforderlich). Ein im erweiterten Formalismus beweisbarer Ausdruck, in dem das Zeichen ι für den bestimmten Artikel nicht vorkommt, erweist sich jedoch schon als beweisbar im zuerst angegebenen Sinne. Daher können wir im folgenden unbedenklich den bestimmten Artikel verwenden, wo es zweckmäßig erscheint, auch ohne verschiedene Formalismen der EHG zu unterscheiden.

4. Einige Definitionen und Sätze

In diesem Abschnitt sollen zunächst eine Reihe von bekannten Begriffsbildungen aus der hyperbolischen Geometrie in den Formalismus der EHG übertragen sowie einige Sätze darüber angeführt werden.

Unter Sätzen der EHG verstehen wir hier beweisbare Ausdrücke. Der strenge Nachweis für die Beweisbarkeit solcher Ausdrücke, d. h. die Ableitung aus den Axiomen mit Hilfe der zugrunde gelegten Schlußregeln, wird allerdings im folgenden (sowohl in diesem Abschnitt als auch später) nirgends durchgeführt. Es werden vielmehr inhaltliche Beweise angegeben, so als hätten wir es mit einer nicht formalisierten Theorie zu tun. Dabei ist es jedoch wesentlich, daß nur Begriffsbildungen der elementaren hyperbolischen Geometrie verwendet werden. Soweit solche Beweise als bekannt vorausgesetzt werden können (was bei den Sätzen dieses Abschnitts meist der Fall ist[2])), wird ganz auf sie verzichtet. Der an sich erforderliche eben erwähnte Nachweis läuft auf eine Formalisierung dieser inhaltlichen Beweise hinaus, die dem im formalen Beweisen Geübten keinerlei Schwierigkeiten bereitet (und für andere nur eine Erschwerung bedeutet).

Viele später benötigte Sätze der EHG, insbesondere solche, die schon zur absoluten Geometrie gehören (d. h., die aus den Axiomen von ax mit Ausnahme des Parallelenaxioms ableitbar sind)[3]), werden als bekannt vorausgesetzt und hier nicht besonders angeführt.

---

[1]) Vgl. SCHRÖTER [10].

[2]) Vgl. dazu HILBERT [7], LIEBMANN [8], EFIMOW [4]. Einige dort nicht elementar geführte Beweise lassen sich leicht so umformen, daß sie in der EHG behandelt werden können.

[3]) Siehe dazu etwa HILBERT [6] §§ 2 bis 6.

Zur Übertragung von Begriffsbildungen der hyperbolischen Geometrie in unseren Formalismus stellen wir die folgenden Definitionen auf. Diese sind (wie überhaupt alle Definitionen im Formalismus) lediglich als Abkürzungen für die definierenden Ausdrücke aufzufassen, deren gebundene[1]) Variablen wir allerdings nicht in die Abkürzung aufnehmen, da es auf ihre Umbenennung nicht ankommt.

a liegt in α:

$Inza\alpha \underset{\text{Df}}{=} \forall A\,(InzAa \to InzA\alpha)$.

(Jeder Punkt von *a* liegt in *α*.)

$A_1, \ldots, A_n$ liegen auf einer Geraden:

$GrA_1 \ldots A_n \underset{\text{Df}}{=} \exists a \bigwedge_{\nu=1}^{n} InzA_\nu a$.

$A_1, \ldots, A_n$ liegen in einer Ebene:

$EbA_1 \ldots A_n \underset{\text{Df}}{=} \exists \alpha \bigwedge_{\nu=1}^{n} InzA_\nu \alpha$.

$a_1, \ldots, a_n$ liegen in einer Ebene:

$Eba_1 \ldots a_n \underset{\text{Df}}{=} \exists \alpha \bigwedge_{\nu=1}^{n} Inza_\nu \alpha$.

(Ein Spezialfall hiervon [$n = 2$] ist die Definition auf S. 139 im Anschluß an das Parallelenaxiom.)

a und b schneiden sich in A:

$abSchnA \underset{\text{Df}}{=} a \neq b \wedge InzAa \wedge InzAb$.

A und B haben voneinander denselben Abstand wie C und D:

$ABaglCD \underset{\text{Df}}{=} AB \underset{s}{\equiv} CD \vee (A = B \wedge C = D)$.

Der Winkel ABC ist kleiner als der Winkel A′B′C′:

$ABC < A'B'C' \underset{\text{Df}}{=} \exists D'\,(ZwA'D'C' \wedge ABC \underset{w}{\equiv} A'B'D')$.

(Der Winkel *A′B′C′* enthält in seinem Inneren den einen Schenkel eines zu *ABC* kongruenten Winkels, dessen anderer Schenkel *B′A′* ist.)

A, B, C bilden einen rechten Winkel:

$RwABC \underset{\text{Df}}{=} \exists D\,(ZwABD \wedge ABC \underset{w}{\equiv} DBC)$.

(Der Winkel *ABC* ist kongruent zu einem seiner Nebenwinkel.)

a steht senkrecht auf b, a ist ein Lot auf b:

$a \perp b \underset{\text{Df}}{=} \exists A \exists B \exists C\,(InzAa \wedge InzBa \wedge InzBb \wedge InzCb \wedge RwABC)$.

(*a* und *b* schließen einen rechten Winkel ein.)

a steht senkrecht auf α, a ist ein Lot auf α, α ist eine Lotebene auf a:

$a \perp \alpha \underset{\text{Df}}{=} \exists A \exists b \exists c\,(Inzb\alpha \wedge Inzc\alpha \wedge bcSchnA \wedge a \perp b \wedge a \perp c)$.

(*a* steht senkrecht auf zwei sich schneidenden Geraden, die in *α* liegen.)

---

[1]) Vgl. etwa SCHRÖTER [11] oder ASSER [2].

α steht senkrecht auf β:

$\alpha \perp \beta \underset{\text{Df}}{=} \exists a(a \perp \alpha \wedge Inza\beta)$.

(β enthält eine auf α senkrecht stehende Gerade.)

A und B liegen spiegelbildlich zu S, durch Spiegelung an S geht A in B über, S ist die Mitte zwischen A und B:

$A\,Sp_S B \underset{\text{Df}}{=} (ZwASB \wedge AS \underset{s}{\equiv} BS) \vee (A = S \wedge B = S)$.

A und B liegen spiegelbildlich zu s, durch Spiegelung an s geht A in B über:

$A\,Sp_s B \underset{\text{Df}}{=} \exists a \exists S(a \perp s \wedge asSchnS \wedge InzAa \wedge InzBa \wedge ASp_S B)$.

a und b liegen spiegelbildlich zu s, durch Spiegelung an s geht a in b über:

$aSp_s b \underset{\text{Df}}{=} \forall A \forall B(InzAa \wedge ASp_s B \rightarrow InzBb)$.

(b enthält die Spiegelbilder der Punkte von a.)

Spiegelungen gehören als spezielle Transformationen nicht zur elementaren (hyperbolischen) Geometrie, wohl aber, wie man hier sieht, die (dreistellige) Relation, daß ein geometrisches Objekt (Punkt, Gerade oder Ebene) durch Spiegelung an einem weiteren Objekt in ein drittes Objekt übergeht. Da außerdem eine Spiegelung durch das geometrische Objekt, an dem gespiegelt wird, eindeutig festgelegt ist, lassen sich die üblichen Sätze über Spiegelungen dennoch im Formalismus der EHG behandeln.

A und B liegen auf derselben Seite von P, A und B bestimmen denselben von P ausgehenden Halbstrahl, A liegt auf dem von P aus durch B gehenden Halbstrahl:

$A \underset{P}{\approx} B \underset{\text{Df}}{=} \exists C(ZwAPC \wedge ZwBPC)$.

(Es gibt einen Punkt C, so daß sowohl A und C als auch B und C auf entgegengesetzten Seiten von P liegen.)

Diese Beziehung läßt sich auch anders charakterisieren, es gelten nämlich folgende Sätze der EHG:

$A \underset{P}{\approx} B \leftrightarrow ZwPAB \vee ZwPBA \vee (A = B \wedge A \neq P)$,

$A \underset{P}{\approx} B \leftrightarrow GrABP \wedge A \neq P \wedge B \neq P \wedge \sim ZwAPB$.

Die Relation, auf derselben Seite eines Punktes P zu liegen, ist bei festgehaltenem P eine Äquivalenzrelation im Bereich der von P verschiedenen Punkte (deren Äquivalenzklassen die von P ausgehenden Halbstrahlen sind). Mit dieser Relation lassen sich auch Sätze über Halbstrahlen in unserem Formalismus ausdrücken, obwohl der Begriff des Halbstrahls (als einer speziellen Punktmenge) selbst nicht elementar ist.

A und B liegen auf entgegengesetzten Seiten von g:

$ZwAgB \underset{\text{Df}}{=} \exists P(InzPg \wedge ZwAPB) \wedge \sim InzAg \wedge \sim InzBg$.

(Die Punkte A und B liegen auf entgegengesetzten Seiten eines Punktes von g, während sie selbst nicht auf g liegen.)

A und B liegen auf derselben Seite von g, A und B bestimmen dieselbe von g begrenzte Halbebene, A liegt in der von g begrenzten und durch B gehenden Halbebene:

$A \underset{g}{\approx} B \underset{\text{Df}}{=} \exists C(ZwAgC \wedge ZwBgC)$.

Für diese Definitionen gelten sinngemäß die eben gemachten Bemerkungen und der folgende Satz der EHG:

$$A \underset{g}{\simeq} B \leftrightarrow \exists\alpha(Inz A\alpha \wedge Inz B\alpha \wedge Inz g\alpha) \wedge \sim Inz Ag \wedge \sim Inz Bg \wedge \sim\exists P(Inz Pg \wedge Zw APB).$$

a und b liegen auf derselben Seite von g:

$$a \underset{g}{\simeq} b \underset{\text{Df}}{=} \forall A\forall B(Inz Aa \wedge Inz Bb \rightarrow A \underset{g}{\simeq} B).$$

(Die Punkte von a und b liegen auf derselben Seite von g.)

Durch die bisherigen Definitionen werden Begriffsbildungen charakterisiert, die schon in der absoluten Geometrie gebräuchlich sind.

Für die (ebene) hyperbolische Geometrie wird nun bei HILBERT [7] außer den Axiomen der absoluten Geometrie noch das folgende Parallelenaxiom verwendet:

Ist b eine beliebige Gerade und A ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so gibt es stets durch A zwei Halbgerade a_1, a_2, die nicht ein und dieselbe Gerade ausmachen und die Gerade b nicht schneiden, während jede in dem durch a_1, a_2 gebildeten Winkelraum gelegene, von A ausgehende Halbgerade die Gerade b schneidet.

Dieses (auch für die räumliche hyperbolische Geometrie sinnvolle) Axiom läßt sich folgendermaßen in unserem Formalismus ausdrücken (vgl. Abb. 1):

$$\sim Inz Ab \rightarrow \exists B_1\exists B_2\big(\sim Gr AB_1B_2 \wedge \sim\exists P(P \underset{A}{\simeq} B_1 \wedge Inz Pb) \wedge \sim\exists P(P \underset{A}{\simeq} B_2 \wedge Inz Pb) \wedge \forall F(Zw B_1FB_2 \rightarrow \exists P(P \underset{A}{\simeq} F \wedge Inz Pb))\big).$$

Da wir der EHG ein anderes Parallelenaxiom zugrunde gelegt haben, müssen wir das HILBERTsche Axiom als Satz der EHG beweisen, um die später benötigten Sätze aus HILBERT [7] verwenden zu können.

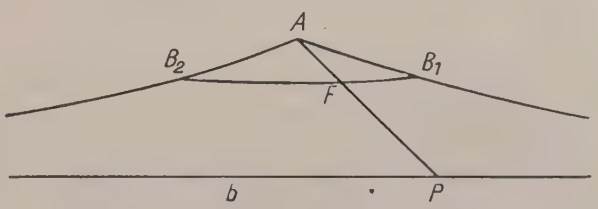


Abb. 1

Nach unserem Parallelenaxiom gibt es eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt derart, daß durch den Punkt wenigstens zwei Geraden gehen, die mit der ersten Geraden in einer Ebene liegen, aber sie nicht treffen. Wir wollen zunächst zeigen, daß es zu jeder Geraden und jedem nicht auf ihr liegenden Punkt wenigstens zwei solche Geraden gibt, d. h. den folgenden Satz beweisen.

Satz: $\forall a\forall A\big(\sim Inz Aa \rightarrow \sim\exists!b(Inz Ab \wedge Ebab \wedge \sim\exists P(Inz Pa \wedge Inz Pb))\big)$.

Dazu gehen wir nach dem Muster von BALDUS [3] S. 47ff. vor. BALDUS sagt, ein Punkt A verhalte sich zu einer Geraden a *euklidisch*, falls durch A höchstens eine Gerade geht, die mit a in einer Ebene liegt, aber a nicht trifft. Entsprechend definieren wir in der EHG:

$$A Eukl\, a \underset{\text{Df}}{=} \exists!b(Inz Ab \wedge Ebab \wedge \sim\exists P(Inz Pa \wedge Inz Pb)).$$

Baldus beweist dann in der absoluten Geometrie den Satz, daß sich jeder Punkt zu jeder (nicht durch ihn gehenden) Geraden euklidisch verhält, wenn sich nur ein Punkt zu einer nicht durch ihn gehenden Geraden euklidisch verhält. Unser Parallelenaxiom besagt gerade, daß es eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt gibt, so daß sich der Punkt nicht euklidisch zu der Geraden verhält. Daraus ergibt sich nach dem Baldusschen Satz, daß sich ein Punkt zu einer nicht durch ihn gehenden Geraden niemals euklidisch verhält, das ist aber gerade der zu beweisende Satz. Es genügt also, den Baldusschen Satz in unserem Formalismus zu beweisen.

Verhalte sich also etwa A' zu a euklidisch, sei l das Lot von A' auf a und L sein Fußpunkt (so daß also $InzA'l \wedge l \perp a \wedge laSchnL$). Nach Baldus genügt es zum Beweis seines Satzes zu zeigen, daß sich jeder Punkt des von L durch A' gehenden Halbstrahls euklidisch zu a verhält. Außerdem beweist Baldus die folgenden beiden Lemmata:

(a) *Wenn sich ein Punkt A des betrachteten Halbstrahls euklidisch zu a verhält, so verhält sich auch jeder Punkt des Halbstrahls, der von a kleineren Abstand als A hat, zu a euklidisch.*

(b) *Wenn sich ein Punkt A des betrachteten Halbstrahls euklidisch zu a verhält, so verhält sich auch der Punkt des Halbstrahls mit dem doppelten Abstand von a zu a euklidisch.*

Die bisherigen Überlegungen bei Baldus sind so geführt, daß sie sich ohne weiteres in den Formalismus der EHG übertragen lassen. Die beiden Lemmata nehmen dabei folgende Gestalt an.

(a) $A \underset{L}{\cong} A' \wedge AEukl\,a \wedge ZwLBA \rightarrow BEukl\,a.$

(b) $A \underset{L}{\cong} A' \wedge AEukl\,a \wedge LSp_A B \rightarrow BEukl\,a.$

Daraus erhält Baldus mit Hilfe des Archimedischen Axioms, daß sich jeder Punkt des betrachteten Halbstrahls zu a euklidisch verhält. Da uns natürliche Zahlen und das Archimedische Axiom in der EHG nicht zur Verfügung stehen, beweisen wir letzteres mit Hilfe eines Stetigkeitsaxioms.

Sei $H_1(A)$ der Ausdruck $A \underset{L}{\cong} A' \wedge AEukl\,a$,

$H_2(B)$ der Ausdruck $B \underset{L}{\cong} A' \wedge \sim BEukl\,a$.

(Diesen Ausdrücken entspricht eine erschöpfende Einteilung der Punkte des betrachteten Halbstrahls in zwei disjunkte Klassen.) Nach Voraussetzung ist $H_1(A')$, und es genügt zu zeigen, daß für alle Punkte A des betrachteten Halbstrahls $H_1(A)$ gilt. Nehmen wir das Gegenteil an, d. h., es gebe einen Punkt B' mit $H_2(B')$. Aus Lemma (a) ergibt sich unmittelbar

$$\forall A \forall B(H_1(A) \wedge H_2(B) \rightarrow ZwLAB), \tag{1}$$

das ist die Voraussetzung des Stetigkeitsaxioms für die Ausdrücke $H_1(A)$ und $H_2(B)$. Sei entsprechend der Behauptung dieses Stetigkeitsaxioms A^* ein Punkt mit

$$\forall A \forall B(A \neq A^* \wedge H_1(A) \wedge B \neq A^* \wedge H_2(B) \rightarrow ZwAA^*B). \tag{2}$$

Wegen $H_1(A')$ und $H_2(B')$ ist dann $A^* = A'$ oder $A^* = B'$ oder $ZwA'A^*B'$, also liegt A^* auf jeden Fall auf dem betrachteten Halbstrahl. Aus (1) und (2) erhält man

$$\forall A \forall B(A \neq A^* \wedge H_1(A) \wedge B \neq A^* \wedge H_2(B) \rightarrow ZwLAA^* \wedge ZwLA^*B) \tag{3}$$

und damit

$$\forall A(A \neq A^* \wedge H_1(A) \rightarrow ZwLAA^*) \tag{4}$$

(das ergibt sich mit $B = B'$ aus (3), falls $B' \neq A^*$ ist, aus (1), falls $B' = A^*$ ist) und ebenso

$$\forall B(B \neq A^* \wedge H_2(B) \rightarrow ZwLA^*B). \tag{5}$$

Daraus ergibt sich umgekehrt, da für jeden Punkt A des betrachteten Halbstrahls $H_1(A)$ oder $H_2(A)$ ist,

$$\forall A(ZwLAA^* \rightarrow H_1(A)), \tag{6}$$

$$\forall B(ZwLA^*B \rightarrow H_2(B)). \tag{7}$$

Sei nun M der Mittelpunkt der Strecke LA^*, sei A ein Punkt zwischen M und A^*, und sei B das Spiegelbild von L an A. Dann ist $ZwLAA^*$ und $ZwLA^*B$, nach (6) und (7) also $H_1(A)$ und $H_2(B)$. Aus $H_1(A)$ und Lemma (b) ergibt sich dagegen $H_1(B)$. Damit ist unsere Annahme zum Widerspruch und der Beweis zu Ende geführt.

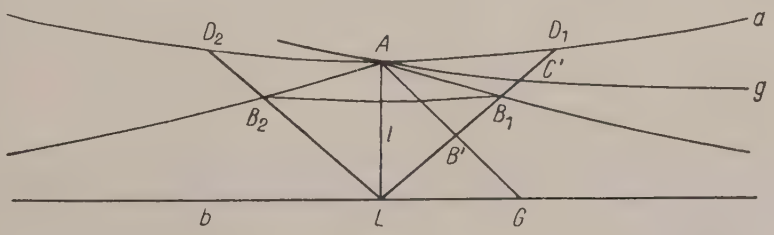


Abb. 2

Wir kommen nun zum Beweis des Hilbertschen (nichteuklidischen) Parallelenaxioms (vgl. Abb. 2). Sei dessen Voraussetzung erfüllt, liege also A nicht auf b. Sei l das Lot von A auf b und L sein Fußpunkt, sei weiter a das Lot in der durch A und b gehenden Ebene auf l in A, sei D_1 ein beliebiger von A verschiedener Punkt von a und D_2 sein Spiegelbild an l. Wie aus der absoluten Geometrie bekannt ist, haben a und b keinen Punkt gemeinsam. Nach dem eben bewiesenen Satz gibt es wenigstens zwei Geraden in der betrachteten Ebene, die durch A gehen und b nicht treffen, also wenigstens eine von a verschiedene Gerade dieser Art; sei g eine solche. Da die Gerade g die Seite D_1D_2 des Dreiecks D_1D_2L innen schneidet und durch keine seiner Ecken geht, schneidet sie nach dem Axiom von Pasch (II 4.) eine weitere Seite dieses Dreiecks innen, sei das ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Seite LD_1 (sonst sind die Indizes 1 und 2 zu vertauschen), und sei C' der Schnittpunkt von g und dieser Seite. Sei dann

$H_1(B)$ der Ausdruck $ZwLBD_1 \wedge \exists P(P \underset{A}{\simeq} B \wedge InzPb)$

(B liegt zwischen L und D_1, und der von A aus durch B gehende Halbstrahl trifft die Gerade b),

$H_2(B)$ der Ausdruck $ZwLBD_1 \wedge \sim\exists P(P \underset{A}{\simeq} B \wedge InzPb)$

(B liegt zwischen L und D_1, und der von A aus durch B gehende Halbstrahl trifft b nicht).

(Diesen Ausdrücken entspricht eine erschöpfende Einteilung der Punkte zwischen L und D_1 in zwei disjunkte Klassen.) Dann gibt es einen Punkt C mit $H_2(C)$; denn C' leistet das Verlangte. Andererseits gibt es auch einen Punkt B mit $H_1(B)$. Sei nämlich G ein Punkt auf b so, daß G mit D_1 auf derselben Seite von l liegt. Dann schneidet der Halbstrahl von A aus durch G die Strecke LD_1 in einem gewissen Punkte B', für den dann $H_1(B')$ gilt. Aus $H_1(B)$ und $ZwLCB$ erhält man für beliebige Punkte B, C mit Hilfe des Axioms von Pasch $H_1(C)$. Also gilt

$$\forall B \forall C(H_1(B) \wedge H_2(C) \rightarrow ZwLBC), \tag{1}$$

das ist die Voraussetzung des Stetigkeitsaxioms für die Ausdrücke $H_1(B)$ und $H_2(C)$. Sei nun entsprechend der Behauptung dieses Stetigkeitsaxioms B_1 ein Punkt mit

$$\forall B \forall C(B \neq B_1 \wedge H_1(B) \wedge C \neq B_1 \wedge H_2(C) \rightarrow ZwBB_1C). \tag{2}$$

Wegen $H_1(B')$ und $H_2(C')$ ist dann $B_1 = B'$ oder $B_1 = C'$ oder $ZwB'B_1C'$, also auf jeden Fall $ZwLB_1D_1$. Aus (1) und (2) erhält man wie im vorigen Beweis

$$\forall B(ZwLBB_1 \rightarrow H_1(B)), \tag{3}$$

$$\forall C(ZwLB_1C \wedge ZwLCD_1 \rightarrow H_2(C)). \tag{4}$$

Weiter ist $H_2(B_1)$. Gälte nämlich $H_1(B_1)$ und wäre dementsprechend P der Punkt, in dem der Halbstrahl von A durch B_1 die Gerade b trifft, so könnten wir einen Punkt Q mit $ZwLPQ$ wählen; der Halbstrahl von A durch Q würde dann die Strecke LD_1 in einem Punkte C mit $ZwLB_1C$ schneiden, und es wäre $H_1(C)$ im Widerspruch zu (4). Wir haben also erhalten, daß der Halbstrahl von A durch B_1 die Gerade b nicht trifft, daß aber für jeden Punkt B zwischen L und B_1 der Halbstrahl von A durch B die Gerade b trifft. Entsprechendes gilt für das Spiegelbild B_2 von B_1 an l (da die Eigenschaft, gemeinsame Punkte zu haben, für Geraden und Halbstrahlen bei Spiegelungen erhalten bleibt). Da B_1 nicht auf a liegt, liegen A, B_1, B_2 nicht auf einer Geraden. Sei nun F ein Punkt zwischen B_1 und B_2. Der Halbstrahl von A durch F, der die Seite B_1B_2 des Dreiecks B_1B_2L innen schneidet, schneidet nach dem Axiom von Pasch auch eine der Seiten LB_1, LB_2 innen oder geht durch L, er trifft also auf jeden Fall die Gerade b. Damit ist gezeigt, daß die Punkte B_1, B_2 das im Hilbertschen Parallelenaxiom Verlangte leisten.

Hilbert nennt nun die Halbgeraden a_1, a_2 in seinem Parallelenaxiom *parallel* zu b und auch parallel zu den Halbgeraden b_1 bzw. b_2, in die b durch einen Punkt C zerlegt wird, so daß a_1 und b_1 (und damit ebenso a_2 und b_2) auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen. Entsprechend definieren wir die Parallelität von Halbstrahlen.

Der von A aus durch B gehende Halbstrahl ist parallel zu dem von C aus durch D gehenden Halbstrahl, kurz, *der Halbstrahl AB ist parallel zu dem Halbstrahl CD* (vgl. Abb. 3):

$$AB \parallel CD \underset{\text{Df}}{\rightleftharpoons} (\sim Gr\,ABC \wedge \sim \exists E(E \underset{A}{\cong} B \wedge E \underset{C}{\cong} D) \wedge \forall F(Zw\,BFC \rightarrow \exists E(E \underset{A}{\cong} F \wedge E \underset{C}{\cong} D))) \vee (A \neq B \wedge C \neq D \wedge (\forall E(E \underset{A}{\cong} B \rightarrow E \underset{C}{\cong} D) \vee \forall E(E \underset{C}{\cong} D \rightarrow E \underset{A}{\cong} B))).$$

Die Bedingung in der zweiten Zeile dieser Definition besagt, daß die Halbstrahlen AB und CD nicht auf einer gemeinsamen Trägergeraden liegen und sich nicht schneiden, daß aber jeder innerhalb des Winkels BAC gelegene, von A ausgehende Halbstrahl den Halbstrahl CD schneidet. Die Bedingung in der dritten Zeile besagt, daß von den Halbstrahlen AB und CD einer ganz im anderen enthalten ist, oder, was dasselbe bedeutet, daß die Punktepaare $[A, B]$ und $[C, D]$ auf einer gemeinsamen Trägergeraden dieselbe Orientierung besitzen. Auch in diesem Falle wollen wir die Halbstrahlen AB und CD parallel nennen. Dann wird nämlich die Parallelität von Halbstrahlen (bzw. von Paaren verschiedener Punkte) eine Äquivalenzrelation, d. h., es gelten die Sätze

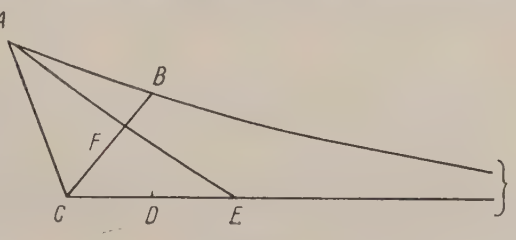


Abb. 3

$$AB \parallel CD \rightarrow A \neq B \wedge C \neq D, \qquad B \underset{A}{\cong} B' \rightarrow AB \parallel AB',$$

$$AB \parallel CD \rightarrow CD \parallel AB, \qquad AB \parallel CD \wedge CD \parallel EF \rightarrow AB \parallel EF.$$

Außerdem ergeben sich aus dem oben bewiesenen Hilbertschen Parallelenaxiom die folgenden beiden Sätze.

$$C \neq D \rightarrow \forall A \exists B\, AB \parallel CD.$$

(Von jedem Punkt aus geht zu einem vorgegebenen Halbstrahl wenigstens ein paralleler Halbstrahl.)

$$AB_1 \parallel CD \wedge AB_2 \parallel CD \rightarrow B_1 \underset{A}{\cong} B_2.$$

(Von jedem Punkt aus geht zu einem vorgegebenen Halbstrahl höchstens ein paralleler Halbstrahl.)

Die angegebenen sechs Sätze gelten übrigens schon in der absoluten Geometrie; charakteristisch für die hyperbolische Geometrie ist es z. B. erst, daß im allgemeinen nicht gleichzeitig $AB \parallel CD$ und $BA \parallel DC$ ist.

Die Äquivalenzklassen der Relation der Parallelität sind die sog. *Enden*. Demnach lassen sich mit dieser Relation auch Sätze über Enden in unserem Formalismus ausdrücken, obwohl der Begriff des Endes (als einer speziellen Menge von Halbstrahlen bzw. Punktepaaren) selbst nicht elementar ist.

In unseren Abbildungen wollen wir parallele Halbstrahlen (also solche, die „durch ein Ende gehen") im folgenden wie üblich mit geschweiften Klammern zusammenfassen.

Nach dem Muster von HILBERT definieren wir die Parallelität zwischen Halbstrahlen und Geraden und zwischen Geraden untereinander.

Der Halbstrahl AB ist parallel zu der Geraden b:

$$AB \parallel b \underset{\text{Df}}{=\!=} \exists C \exists D(InzCb \wedge InzDb \wedge AB \parallel CD).$$

$a_1, \ldots, a_n$ haben ein Ende gemeinsam, $a_1, \ldots, a_n$ sind in einer Richtung (nach einem Ende hin) paarweise parallel:

$$Enda_1 \ldots a_n \underset{\text{Df}}{=\!=} \exists A_1 \exists B_1 \exists A_2 \exists B_2 \ldots \exists A_n \exists B_n \Big(\bigwedge_{\nu=1}^{n} (InzA_\nu a_\nu \wedge InzB_\nu a_\nu) \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{n} \bigwedge_{\nu=1}^{n} A_\mu B_\mu \parallel A_\nu B_\nu \Big).$$

Es gelten die folgenden Sätze der EHG.

$$AB \parallel CD \wedge RwACD \rightarrow \forall F\big(ZwAFC \rightarrow \exists E(RwAFE \wedge E \underset{A}{\simeq} B)\big).$$

(Wenn $AB \parallel CD$ ist und die Gerade AC auf CD senkrecht steht, so schneidet jedes Lot, das in der den vorgegebenen Punkten gemeinsamen Ebene auf der Geraden AC in einem Punkt zwischen A und C errichtet wird, den Halbstrahl AB.)

$$A \neq B \wedge C \neq D \wedge \sim AB \parallel CD \rightarrow \exists !! a(AB \parallel a \wedge CD \parallel a).$$

(Zu zwei [verschiedenen] vorgegebenen Enden gibt es genau eine Gerade, die durch diese Enden geht [die diese Enden „verbindet"].)

$$A \neq B \wedge \sim AB \parallel a \rightarrow \exists !! b(AB \parallel b \wedge b \perp a).$$

(Von einem vorgegebenen Ende gibt es auf eine nicht durch dieses Ende gehende Gerade genau ein Lot.)

$$aSp_s a' \wedge bSp_s b' \wedge Endab \rightarrow Enda'b'.$$

(Durch eine Spiegelung [an einer Geraden] werden parallele Geraden wieder in parallele Geraden übergeführt.)

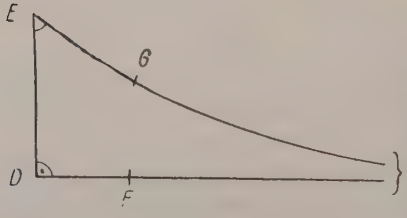


Abb. 4

Auch Sätze über den Parallelwinkel und über komplementäre Strecken lassen sich in der EHG behandeln. Da uns reelle Zahlen, also auch Längen von Strecken und Größen von Winkeln in der EHG nicht zur Verfügung stehen, ordnen wir in den folgenden Definitionen Strecken und Winkel selbst (bzw. die sie bestimmenden Punkte) einander zu.

A, B, C bilden einen Parallelwinkel zu D, E, der Winkel ABC ist ein Parallelwinkel zur Strecke DE, die Strecke DE ist eine Paralleldistanz zum Winkel ABC (vgl. Abb. 4):

$$ABCPwDE \underset{\text{Df}}{=\!=} \exists F \exists G(DF \parallel EG \wedge RwEDF \wedge DEG \underset{w}{\equiv} ABC).$$

(Es gibt zwei von den Endpunkten der Strecke DE ausgehende parallele Halbstrahlen derart, daß die Strecke mit dem einen von ihnen einen rechten Winkel und mit dem anderen einen zum Winkel ABC kongruenten Winkel bildet.)

A, B bilden eine komplementäre Strecke zu C, D, die Strecke AB ist komplementär zur Strecke CD (vgl. Abb. 5):

$$AB\ Cp\ CD \underset{\mathrm{Df}}{\rightleftharpoons} \exists B' \exists E \exists F (Rw B' C D \wedge CB' \underset{s}{\equiv} AB \wedge Eb B' C D E F \wedge Rw C B' E \wedge Rw C D F \wedge B' E \parallel DF).$$

(Die Strecken AB und CD lassen sich so rechtwinklig aneinanderlegen, daß die Lote, die auf diesen Strecken in den vom Scheitel des rechten Winkels verschiedenen Endpunkten und in der Ebene des rechten Winkels errichtet sind, zueinander parallel sind. Das bedeutet, daß sich die Parallelwinkel von AB und CD [in Abb. 5 mit einfachem Bogen bezeichnet, während rechte Winkel — wie auch sonst — durch einen Bogen mit Punkt angedeutet sind] zu einem rechten Winkel ergänzen.)

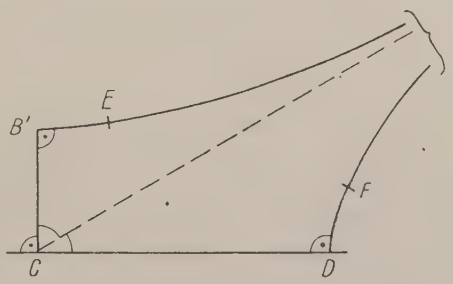


Abb. 5

Aus dem Beweis des Hilbertschen Parallelenaxioms ergibt sich, daß ein Parallelwinkel einer Strecke stets spitz (d. h. kleiner als ein Rechter) ist. Nach bekanntem Muster kann man beweisen, daß es zu jedem spitzen Winkel eine Paralleldistanz und zu jeder Strecke einen Parallelwinkel und eine komplementäre Strecke gibt. Außerdem erwähnen wir die folgenden Sätze der EHG.

$$ABC \underset{w}{\equiv} A'B'C' \wedge DE \underset{s}{\equiv} D'E' \rightarrow (ABC\ Pw DE \leftrightarrow A'B'C'\ Pw D'E'),$$

$$ABC\ Pw DE \wedge A'B'C'\ Pw D'E' \rightarrow (ABC \underset{w}{\equiv} A'B'C' \leftrightarrow DE \underset{s}{\equiv} D'E'),$$

$$AB \underset{s}{\equiv} A'B' \wedge CD \underset{s}{\equiv} C'D' \rightarrow (AB\ Cp\ CD \leftrightarrow A'B'\ Cp\ C'D'),$$

$$AB\ Cp\ CD \wedge A'B'\ Cp\ C'D' \rightarrow (AB \underset{s}{\equiv} A'B' \leftrightarrow CD \underset{s}{\equiv} C'D').$$

(Die Parallelwinkelrelation und die Relation der Komplementarität bleiben erhalten, wenn man zu kongruenten Stücken [Strecken oder Winkel] übergeht. Außerdem ist in diesen Relationen durch ein Stück das andere bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.)

$$AB\ Cp\ CD \rightarrow CD\ Cp\ AB.$$

In Ergänzung zu den bekannten Kongruenzsätzen für Dreiecke (und beliebige Polygone) führen wir noch die folgenden beiden Kongruenzsätze an.

Kongruenzsatz 1:

$$AB \parallel CD \wedge RwCAB \wedge RwDBA$$

$$\wedge A'B' \parallel C'D' \wedge RwC'A'B' \wedge RwD'B'A'$$

$$\wedge AB \equiv_s A'B'$$

$$\rightarrow (AC \equiv_s A'C' \leftrightarrow BD \equiv_s B'D').$$

(Wenn in der in Abb. 6 angedeuteten Konfiguration $AB \equiv_s A'B'$ ist, so ist $AC \equiv_s A'C'$ genau dann, wenn $BD \equiv_s B'D'$ ist.)

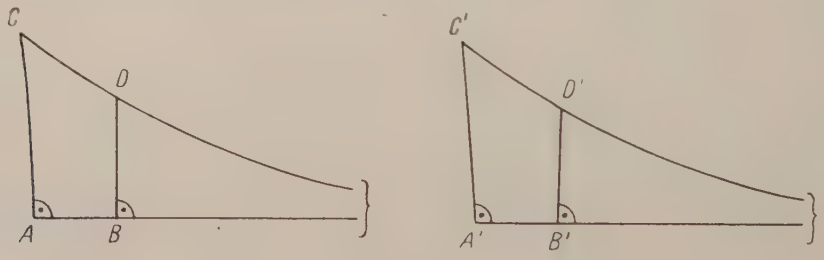


Abb. 6

Kongruenzsatz 2:

$$a \perp b \wedge Endca \wedge Endcb \wedge abSchnA \wedge InzBb \wedge InzDc \wedge RwABD$$

$$\wedge a' \perp b' \wedge Endc'a' \wedge Endc'b' \wedge a'b'SchnA' \wedge InzB'b' \wedge InzD'c' \wedge RwA'B'D'$$

$$\rightarrow (AB \equiv_s A'B' \leftrightarrow BD \equiv_s B'D').$$

(In der in Abb. 7 angedeuteten Konfiguration ist $AB \equiv_s A'B'$ genau dann, wenn $BD \equiv_s B'D'$ ist.)

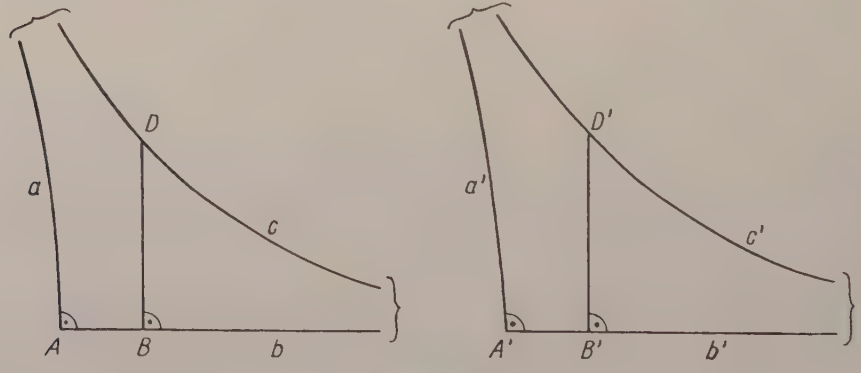


Abb. 7

§ 2. Die formalisierte Arithmetik der reellen Zahlen (ARZ)[1])

1. Ausdrucksbestimmung

In der ARZ verwenden wir nur eine Sorte von *Variablen*, nämlich die Variablen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ für reelle Zahlen bzw. Elemente der betrachteten Struktur. Aus den Variablen und den Zeichen 0 und 1 werden *Terme* in bekannter Weise zusammengesetzt mit Hilfe der Operationszeichen $+, \cdot, -$ (letzteres für die einstellige Operation der Inversenbildung) und der Klammern (,).[2]) Der Buchstabe $\mathfrak{T}$ soll im folgenden stets einen Term der ARZ bedeuten.

Prädikative Ausdrücke sind die Zeichenreihen der Form $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$ und $pos\,\mathfrak{T}_1$, wobei $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ Terme sind.

Die *Ausdrücke* der ARZ werden wie in der EHG aus den prädikativen Ausdrücken prädikatenlogisch aufgebaut. Im folgenden soll der Buchstabe $\mathfrak{H}$ stets einen Ausdruck der ARZ bedeuten. *Aussagen* sind natürlich wieder die Ausdrücke ohne freie Variablen.

Wir bedienen uns auch hier der in § 1.1 angegebenen Abkürzungen und Vereinfachungen. Insbesondere verwenden wir als Variablen gelegentlich kleine lateinische Buchstaben, und zwar (zum Unterschied von den Geradenvariablen in der EHG) die letzten des Alphabets, ohne und mit irgendwelchen Indizes. Die Verabredungen über das Weglassen von Klammern übernehmen wir sinngemäß auch für Terme (dabei soll $+$ stärker trennen als $\cdot$). Dagegen wollen wir einen Term der Form $-\mathfrak{T}$ bisweilen in Klammern einschließen, also $(-\mathfrak{T})$ statt $-\mathfrak{T}$ schreiben. Den bestimmten Artikel wollen wir in der ARZ nicht verwenden.

2. Interpretation

Für die Interpretation legen wir eine beliebige, der Ausdrucksbestimmung adäquate Struktur K zugrunde, d. h. eine Menge, in der zwei Elemente (das „Nullelement" und das „Einselement" von K) ausgezeichnet sind, mit zwei zweistelligen Operationen (der „Addition" und der „Multiplikation"), einer einstelligen Operation (der „Inversenbildung") und einer einstelligen Relation (der „Positivitätsrelation" von K).

Um die *Erfüllung* eines Ausdrucks $\mathfrak{H}$ durch eine Belegung $\mathfrak{f}$ über der Struktur K (d. h. durch eine Funktion, die jeder Variablen ein Element von K eindeutig zuordnet) zu erklären, definieren wir zunächst in naheliegender Weise den *Wert* $Wert_K(\mathfrak{T}, \mathfrak{f})$ beliebiger Terme $\mathfrak{T}$ bei einer Belegung $\mathfrak{f}$ über K induktiv entsprechend der Definition der Terme mit Hilfe der Operationen von K.[3]) $Wert_K(\mathfrak{T}, \mathfrak{f})$ ist also stets ein Element von K. Dann verabreden wir, daß eine Belegung $\mathfrak{f}$ eine Gleichung

---

[1]) Der hier beschriebene Aufbau der ARZ und die im wesentlichen bei Tarski [14] bewiesenen Theoreme über die ARZ, die für die folgenden Untersuchungen benötigt werden, wurden auch in [13] behandelt, so daß der damit vertraute Leser diesen Paragraphen überschlagen kann.

[2]) Vgl. etwa [13] S. 149.

[3]) Vgl. [13] S. 150.

$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$ genau dann erfüllt, wenn die Elemente $Wert_K(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{f})$ und $Wert_K(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{f})$ von K identisch sind, und daß sie den Ausdruck $pos\,\mathfrak{T}_1$ genau dann erfüllt, wenn die Positivitätsrelation von K auf das Element $Wert_K(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{f})$ zutrifft. Die Erfüllung der zusammengesetzten Ausdrücke erklären wir wieder wie im Prädikatenkalkül der ersten Stufe. Für die Erfüllung des Ausdrucks $\mathfrak{H}$ durch die Belegung $\mathfrak{f}$ über der Struktur K schreiben wir kurz $\mathfrak{f} Erf_K \mathfrak{H}$.

Ein Ausdruck $\mathfrak{H}$ der ARZ, der von jeder Belegung $\mathfrak{f}$ über K erfüllt wird, heißt über K *allgemeingültig* ($ag_K \mathfrak{H}$). Eine zur Ausdrucksbestimmung adäquate Struktur, über der alle der weiter unten angeführten Axiome der ARZ allgemeingültig sind, heißt ein *Modell* der ARZ.

Im folgenden spielt ein Modell eine besondere Rolle, nämlich der angeordnete Körper R der reellen Zahlen, d. h. die Menge der reellen Zahlen mit den ausgezeichneten Zahlen 0 und 1, mit gewöhnlicher Addition, Multiplikation und Inversenbildung und der Relation, positiv zu sein. Für Erfüllung und Allgemeingültigkeit über R verwenden wir meist die kürzeren Bezeichnungen $\mathfrak{f} Erfz \mathfrak{H}$ und $agz \mathfrak{H}$ an Stelle von $\mathfrak{f} Erf_R \mathfrak{H}$ und $ag_R \mathfrak{H}$.

3. Beweisbarkeit

Die *Ableitbarkeit* in der ARZ ist ganz analog zur EHG erklärt.[1]) Das Axiomensystem der ARZ besteht aus den üblichen *logischen Axiomen*[2]) und den folgenden *eigentlichen Axiomen*.

I. Schiefkörperaxiome

$x + (y + z) = (x + y) + z.$

$0 + x = x.$

$-x + x = 0.$

$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

$1 \cdot x = x.$

$x \neq 0 \rightarrow \exists y\; y \cdot x = 1.$

$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$

$0 \neq 1.$

II. Anordnungsaxiome

$\sim pos\, 0.$

$pos\, x \vee x = 0 \vee pos\, -x.$

$pos\, x \wedge pos\, y \rightarrow pos\,(x + y).$

$pos\, x \wedge pos\, y \rightarrow pos\,(x \cdot y).$

[1]) Lediglich eine Schlußregel ist abzuändern; vgl. dazu [13] S. 150.
[2]) Siehe etwa [13] S. 151.

III. Stetigkeitsaxiome

Das sind alle Ausdrücke der Form

$$\forall x(\mathfrak{H}_1(x) \vee \mathfrak{H}_2(x)) \wedge \exists x \mathfrak{H}_1(x) \wedge \exists x \mathfrak{H}_2(x) \wedge \forall x_1 \forall x_2 (\mathfrak{H}_1(x_1) \wedge \mathfrak{H}_2(x_2) \to x_1 < x_2)$$
$$\to \exists x^* (\forall x (\mathfrak{H}_1(x) \to x \leqq x^*) \wedge \forall x (\mathfrak{H}_2(x) \to x^* \leqq x)),$$

wobei $\mathfrak{H}_1(x)$ und $\mathfrak{H}_2(x)$ Ausdrücke sind, in denen x^*, x_1, x_2 nicht vorkommen. (Axiom vom DEDEKINDschen Schnitt, eingeschränkt auf die Mengen von reellen Zahlen oder Elementen der betrachteten Struktur, die sich durch Ausdrücke repräsentieren lassen.)

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$\mathfrak{T}_1 \leqq \mathfrak{T}_2$ für $\mathfrak{T}_1 < \mathfrak{T}_2 \vee \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$,

$\mathfrak{T}_1 < \mathfrak{T}_2$ für $pos(\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1)$,

$(\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1)$ für $\mathfrak{T}_2 + -\mathfrak{T}_1$.

Außerdem verwenden wir später noch die Abkürzung $\mathfrak{T}^2$ für $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{T}$.

Einen aus diesen Axiomen ableitbaren Ausdruck $\mathfrak{H}$ nennen wir in der ARZ *beweisbar* und schreiben dafür $\vdash_z \mathfrak{H}$.

Analog zur EHG gilt dann auch das

Theorem von der inhaltlichen Widerspruchsfreiheit der ARZ: *Wenn* $\vdash_z \mathfrak{H}$, *so* $agz\mathfrak{H}$.

4. Wissenschaftstheorie für die ARZ

Wie in [13] gezeigt wurde, ist das kommutative Gesetz der Multiplikation beweisbar. Damit können wir aus TARSKI [14], wo dieses Gesetz unter die Axiome aufgenommen ist, ohne weiteres die folgenden Ergebnisse übernehmen.

Für die ARZ wurde von TARSKI ein Entscheidungsverfahren angegeben. Ein beliebig vorgegebener Ausdruck $\mathfrak{H}$ wird durch dieses Verfahren[1]) gewissen Umformungen unterworfen, so daß das Resultat der Umformungen genau dann allgemeingültig ist, wenn $\mathfrak{H}$ es ist. Das Resultat der Umformungen ist aber in jedem Falle einer der beiden Ausdrücke $0 = 0$, $0 = 1$. Da von diesen nur der erste allgemeingültig ist, ist ein beliebiger Ausdruck $\mathfrak{H}$ also genau dann allgemeingültig, wenn die Umformungen des Entscheidungsverfahrens das Resultat $0 = 0$ liefern.

Die Axiomensysteme von TARSKI (und damit auch unser Axiomensystem) sind nun so konstruiert, daß das Resultat der Umformungen des Verfahrens auch genau dann beweisbar ist, wenn es der Ausgangsausdruck ist.[2]) Da von den beiden Ausdrücken $0 = 0$ und $0 = 1$ nur der erste beweisbar ist, ist ein beliebiger Ausdruck $\mathfrak{H}$ auch genau dann beweisbar, wenn die Umformungen des Verfahrens das Resultat $0 = 0$ liefern.

---

[1]) Im ersten Schritt des Verfahrens wollen wir zunächst von $\mathfrak{H}$ zur *Generalisierten* von $\mathfrak{H}$ (s. SCHRÖTER [11] S. 63f.) übergehen, um das (nur für Aussagen zu dem erwähnten Ergebnis führende) TARSKIsche Verfahren auf beliebige Ausdrücke anwenden zu können.

[2]) Das Resultat ist sogar äquivalent zum Ausgangsausdruck, wenn dieser eine Aussage ist.

Daraus ergibt sich insbesondere das

Theorem von der inhaltlichen Vollständigkeit der ARZ:
Wenn agz $\mathfrak{H}$, so $\vdash_z \mathfrak{H}$.

Die beweisbaren Ausdrücke sind sogar über jedem Modell der ARZ allgemeingültig. Darüber hinaus ist ein beliebiger Ausdruck $\mathfrak{H}$, der über einem Modell allgemeingültig ist, über jedem Modell allgemeingültig; die Modelle der ARZ sind also „arithmetisch ununterscheidbar"[1]).

Schließlich werden die Modelle wie folgt charakterisiert.

Theorem: *K ist genau dann ein Modell der* ARZ, *wenn K ein reell-abgeschlossener Körper*[2]) *ist.*[3])

§ 3. Die Vollständigkeit der elementaren hyperbolischen Geometrie

In diesem Paragraphen soll das folgende, schon in § 1.3 angekündigte Vollständigkeitstheorem für die EHG durch Rückführung auf das entsprechende Theorem der ARZ bewiesen werden.

Theorem von der inhaltlichen Vollständigkeit der EHG:
Wenn agg H, so $\vdash_g H$.

1. Rückführung auf das Vollständigkeitstheorem für Aussagen der Punktgeometrie

Zunächst genügt es, das eben angegebene Vollständigkeitstheorem für Aussagen der EHG zu beweisen. Die *Generalisierte*[4]) *Gen* (H) eines beliebigen Ausdrucks H ist nämlich eine Aussage, die gleichzeitig mit H allgemeingültig und gleichzeitig mit H beweisbar ist. Aus der Gültigkeit des Vollständigkeitstheorems für Aussagen ergibt sich also die oben behauptete Gültigkeit für beliebige Ausdrücke.

Zum Zwecke einer weiteren Rückführung wollen wir die aus Ausdrücken der Form $A_i = A_j$ und $A_i A_j agl A_k A_l$ (s. S. 141) prädikatenlogisch aufgebauten Ausdrücke als Ausdrücke der *Punktgeometrie* bezeichnen. (Das sind also spezielle Ausdrücke der EHG, in denen als Variablen nur Punktvariablen vorkommen.) Unter den Aussagen der Punktgeometrie verstehen wir dann natürlich die Ausdrücke der Punktgeometrie, die Aussagen (der EHG) sind.

Es genügt nun, an Stelle des Vollständigkeitstheorems für Aussagen der EHG das folgende zu beweisen:

Vollständigkeitstheorem für Aussagen der Punktgeometrie:
Für jede Aussage H der Punktgeometrie gilt: Wenn agg H, so $\vdash_g H$.

---

[1]) Bei Tarski: „arithmetically indistinguishable".

[2]) Im Sinne von Artin und Schreier. Siehe Artin/Schreier [1] oder van der Waerden [17] S. 238ff.

[3]) Bei Tarski [14] ist nur erwähnt, daß jeder reell-abgeschlossene Körper Modell der ARZ ist. Zur Umkehrung vgl. [13] S. 155, Fußnote 4.

[4]) Siehe Schröter [11] S. 63f.

Bekanntlich läßt sich nämlich zu jeder Aussage der EHG eine äquivalente Aussage der Punktgeometrie konstruieren. Diese Konstruktion wurde in [13] für die euklidische Geometrie ausgeführt. Sie läßt sich für die EHG ungeändert übernehmen, da zum Beweis der Äquivalenz nur die folgenden Sätze gebraucht wurden, die sämtlich zur absoluten Geometrie gehören.

1. $\alpha = \beta \leftrightarrow \forall A\,(Inz A\alpha \rightarrow Inz A\beta)$.
   ($\alpha = \beta$ genau dann, wenn jeder Punkt von α in β liegt.)
2. $a = b \leftrightarrow \forall A\,(Inz A a \rightarrow Inz A b)$.
   ($a = b$ genau dann, wenn jeder Punkt von a auf b liegt.)
3. $\sim Gr ABC \wedge Inz A\alpha \wedge Inz B\alpha \wedge Inz C\alpha \rightarrow (Inz D\alpha \leftrightarrow Eb ABCD)$.
   (Wenn A, B, C in α aber nicht auf einer Geraden liegen, so liegt D in α genau dann, wenn D mit A, B und C in einer Ebene liegt.)
4. $\forall\alpha\exists A\exists B\exists C(\sim Gr ABC \wedge Inz A\alpha \wedge Inz B\alpha \wedge Inz C\alpha)$.
   (In jeder Ebene gibt es Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen.)
5. $\sim Gr ABC \rightarrow \exists\alpha(Inz A\alpha \wedge Inz B\alpha \wedge Inz C\alpha)$.
   (Das ist ein Teil von Axiom I B 1.)
6. $A \neq B \wedge Inz Aa \wedge Inz Ba \rightarrow (Inz Ca \leftrightarrow Gr A B C)$.
   (Wenn A und B auf a liegen, aber voneinander verschieden sind, so liegt C auf a genau dann, wenn C mit A und B auf einer Geraden liegt.)
7. $\forall a\exists A\exists B(A \neq B \wedge Inz Aa \wedge Inz Ba)$.
   (Axiom I A 2.)
8. $A \neq B \rightarrow \exists a(Inz Aa \wedge Inz Ba)$.
   (Teil von Axiom I A 1.)
9. $ABC \underset{w}{\equiv} A'B'C' \leftrightarrow \sim Gr ABC \wedge \sim Gr A'B'C'$
   $\wedge\, \exists A^*\exists C^*\exists A'^*\exists C'^*(Zw BAA^* \wedge AA^* \underset{s}{\equiv} B'A'$
   $\wedge\, Zw BCC^* \wedge CC^* \underset{s}{\equiv} B'C'$
   $\wedge\, Zw B'A'A'^* \wedge A'A'^* \underset{s}{\equiv} BA$
   $\wedge\, Zw B'C'C'^* \wedge C'C'^* \underset{s}{\equiv} BC$
   $\wedge\, A^*C^* \underset{s}{\equiv} A'^*C'^*)$.
   (Charakterisierung der Winkelkongruenz mit Hilfe des ersten und des dritten Kongruenzsatzes bei Verlängerung entsprechender Schenkelstücke zu gleich langen Strecken.)
10. $Zw ABC \leftrightarrow Gr ABC \wedge A \neq B \wedge A \neq C \wedge B \neq C$
    $\wedge\, \exists B'\exists D\big(B' \neq B \wedge Gr ABB' \wedge BA \underset{s}{\equiv} B'A \wedge D \neq A \wedge BD \underset{s}{\equiv} B'D$
    $\wedge\, \forall E\,(Gr ADE \rightarrow \sim EC \underset{s}{\equiv} AB \wedge \sim EC \underset{s}{\equiv} BC)\big)$.
    (Charakterisierung der Zwischenbeziehung; die Bedingungen in der zweiten Zeile besagen, daß die Gerade durch A und D [als Mittellot zu B und B'] auf der Geraden durch A, B und C senkrecht steht, die Bedingungen in der dritten Zeile besagen, daß A außerhalb der Kreise um C mit den Radien AB und BC liegt [sonst würde ein solcher Kreis die Gerade durch A und D schneiden, und für den Schnittpunkt würde Kongruenz eintreten], d. h., daß diese Strecken kleiner sind als AC.)

11. $EbA_1A_2A_3A_4 \leftrightarrow \exists B \exists C (B \neq C \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{4} BA_\nu \equiv_g CA_\nu)$.

(Charakterisierung der Ebenenbeziehung; Darstellung einer Ebene als Mittelebene zweier Punkte B und C.)

12. $GrA_1A_2A_3 \leftrightarrow \exists B_1 \exists C_1 \exists B_2 \exists C_2 (\bigwedge_{\mu=1}^{2} (B_\mu \neq C_\mu \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{3} B_\mu A_\nu \equiv_g C_\mu A_\nu)$
$\wedge \exists D (B_1 D \equiv_g C_1 D \wedge \sim B_2 D \equiv_g C_2 D))$.

(Charakterisierung der Geradenbeziehung; Darstellung einer Geraden als Schnittgebilde zweier Ebenen, die voneinander verschieden sind.)

13. $AB \equiv_g CD \leftrightarrow ABaglCD \wedge C \neq D$.

(Charakterisierung der Streckenkongruenz mit Hilfe der Abstandsgleichheit.)

2. Rückführung auf das Vollständigkeitstheorem der ARZ

Das zu beweisende Vollständigkeitstheorem für Aussagen der Punktgeometrie soll jetzt auf das in § 2.4 zitierte Vollständigkeitstheorem der ARZ zurückgeführt werden.

Dazu werden wir jedem Ausdruck H der Punktgeometrie einen Ausdruck $Rdz(H)$ der ARZ, *die arithmetische Reduzierte von* H, zuordnen, so daß die folgenden beiden Theoreme für jede Aussage H der Punktgeometrie gelten.

Theorem 1: *Wenn* $aggH$, *so* $agz\,Rdz(H)$.

Theorem 2: *Wenn* $\vdash_z Rdz(H)$, *so* $\vdash_g H$.

Aus Theorem 1, dem Vollständigkeitstheorem der ARZ für den Ausdruck $Rdz(H)$ und Theorem 2 ergibt sich dann tatsächlich das Vollständigkeitstheorem für eine beliebige Aussage H der Punktgeometrie.

An Stelle von Theorem 1 werden wir ohne zusätzliche Mühe die folgende Verschärfung beweisen.

Theorem 1′: *Für jede Aussage* H *der Punktgeometrie gilt*:

$aggH$ *genau dann, wenn* $agz\,Rdz(H)$.

Dagegen scheitert ein direkter Beweis von Theorem 2, induktiv entsprechend der Definition der Beweisbarkeit von $Rdz(H)$ offensichtlich daran, daß bei der Ableitung einer arithmetischen Reduzierten $Rdz(H)$ auch Ausdrücke der ARZ auftreten können, die nicht arithmetische Reduzierten von Ausdrücken der Punktgeometrie sind. Deshalb werden wir auch umgekehrt zu jedem Ausdruck $\mathfrak{H}$ der ARZ einen entsprechenden Ausdruck $Rdg(\mathfrak{H})$ der EHG, *die geometrische Reduzierte von* $\mathfrak{H}$, bilden, so daß sich zunächst das folgende Theorem induktiv beweisen läßt.

Theorem 2′: *Für jeden Ausdruck* $\mathfrak{H}$ *der* ARZ *gilt*: *Wenn* $\vdash_z \mathfrak{H}$, *so* $\vdash_g Rdg(\mathfrak{H})$.

Gehen wir dann von einer Aussage H der Punktgeometrie aus, so führt die doppelte Reduziertenbildung zwar nicht zu H zurück, aber zu einer äquivalenten Aussage, d. h., es wird sich das folgende Theorem ergeben.

Theorem 3′: *Für jede Aussage* H *der Punktgeometrie gilt*: $\vdash_g (H \leftrightarrow Rdg(Rdz(H)))$[1].

Theorem 2 ergibt sich dann aus den Theoremen 2′ (angewandt auf den Ausdruck $Rdz(H)$ der ARZ) und 3′.

[1] Aus der Äquivalenz der Ausdrücke H und $Rdg(Rdz(H))$ ergibt sich auf Grund der logischen Axiome und der Schlußregeln natürlich, daß einer dieser Ausdrücke genau dann beweisbar ist, wenn es der andere ist.

Die Zerlegung der zu lösenden Aufgabe in die Theoreme 1′, 2′ und 3′ (bei geeigneten Reduziertenbildungen) wurde für die euklidische Geometrie in [13] völlig analog vorgenommen. Dagegen werden die nun folgende Konstruktion der Reduzierten und der Beweis dieser Theoreme wesentlich durch die Natur der vorgegebenen Theorien, also der EHG und der ARZ, bestimmt.

1. Die Bildung der arithmetischen Reduzierten läuft auf eine arithmetische Beschreibung geometrischer Sachverhalte hinaus. Eine solche Beschreibung benutzt normalerweise irgendwelche Koordinaten der vorkommenden geometrischen Gebilde. Da wir uns in Theorem 1′ auf Ausdrücke der Punktgeometrie beschränken, haben wir im wesentlichen nur die Abstandsgleichheit von Punkten in ihren Koordinaten auszudrücken, und zwar kommt es, da die Beschreibung in der ARZ erfolgen soll, darauf an, ein Kriterium für die Abstandsgleichheit von Punkten zu finden, das sich rational (und damit ganz-rational) in den Koordinaten der Punkte ausdrücken läßt. Da Theorem 1′ von der Allgemeingültigkeit von Ausdrücken handelt, also sich auf das KLEINsche Kugelmodell $\mathfrak{K}_R$ bezieht, brauchen wir übrigens nur $\mathfrak{K}_R$ arithmetisch zu beschreiben und nicht etwa an dieser Stelle schon irgendwelche Koordinaten auf Grund der Axiome der EHG einzuführen. Die Punkte von $\mathfrak{K}_R$ waren eingeführt als gewisse Tripel von reellen Zahlen. Wir wollen nun einfach diese Zahlen als Koordinaten der Punkte verwenden. Mit diesen Koordinaten gelingt es uns, ein Kriterium der gewünschten Art herzuleiten.[1])

Den dreidimensionalen Zahlenraum R^3 wollen wir jetzt wie üblich als Vektorraum auffassen und für die Operationen darüber die üblichen, aus der analytischen Geometrie bekannten Bezeichnungen verwenden. Das innere Produkt von Elementen („Vektoren“ oder „Punkten“) $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ des R^3 bezeichnen wir insbesondere mit $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, das innere Produkt von $\mathfrak{x}$ mit sich selbst mit $\mathfrak{x}^2$. Die Punkte von $\mathfrak{K}_R$ sind dann die Vektoren $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x}^2 < 1$.

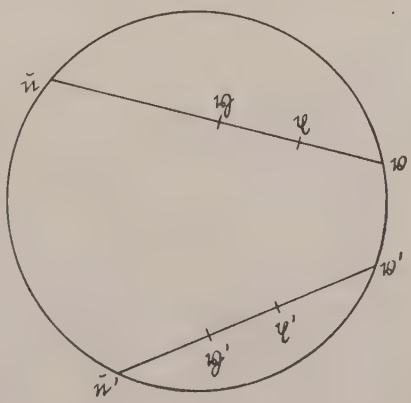


Abb. 8

Seien jetzt $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte von $\mathfrak{K}_R$. Seien dann $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die Punkte, in denen die Gerade durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die absolute Fläche $\mathfrak{z}^2 = 1$ schneidet (vgl. Abb. 8). Wir betrachten das Doppelverhältnis $\delta = (\mathfrak{u}, \mathfrak{v}; \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \dfrac{u-x}{u-y} : \dfrac{v-x}{v-y}$, wobei u, v, x, y affine Koordinaten von $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ auf der Geraden durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind. Um δ eindeutig festzulegen, wählen wir $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ etwa so, daß das Paar $[\mathfrak{x}, \mathfrak{u}]$ von $[\mathfrak{y}, \mathfrak{v}]$ getrennt wird, d. h., daß $\delta > 1$ ist. (Bei Vertauschung von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ würde das Doppelverhältnis in den reziproken Wert übergehen.) Bekanntlich lassen sich $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ genau dann durch eine hyperbolische

[1]) Die folgenden, zu diesem Zwecke angestellten Überlegungen sind rein inhaltlicher Art und nicht an die zugrunde gelegten Formalismen gebunden.

Bewegung in Punkte $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ überführen, wenn das für $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ analog erklärte Doppelverhältnis δ' gleich δ ist. Daher wollen wir jetzt δ berechnen.[1])

Auf der Geraden durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ordnen wir jedem Punkt $\mathfrak{p}$ eine (affine) Koordinate t zu vermöge der Parameterdarstellung $\mathfrak{p} = \mathfrak{x} + t \cdot (\mathfrak{y} - \mathfrak{x})$. Dann hat $\mathfrak{x}$ die Koordinate $x = 0$ und $\mathfrak{y}$ die Koordinate $y = 1$. Das gesuchte Doppelverhältnis ist der Quotient zweier Teilverhältnisse $\delta = \lambda_u : \lambda_v$, wobei allgemein $\lambda_t = \frac{t-x}{t-y} = \frac{t}{t-1} \neq 1$ und damit $t = \frac{\lambda_t}{\lambda_t - 1}$ ($t \neq 1$ beliebig reell). Nach Definition von u und $\mathfrak{v}$ sind u und v die beiden Lösungen der folgenden quadratischen Gleichung in t:

$$(\mathfrak{x} + t(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}))^2 = 1.$$

Damit sind λ_u und λ_v Lösungen der folgenden Gleichung in λ:

$$\left(\mathfrak{x} + \frac{\lambda}{\lambda - 1}(\mathfrak{y} - \mathfrak{x})\right)^2 = 1.$$

Diese Gleichung ist (unter der Nebenbedingung $\lambda \neq 1$) gleichwertig mit den folgenden:

$$(\lambda\mathfrak{y} - \mathfrak{x})^2 = (\lambda - 1)^2,$$
$$\lambda^2(1 - \mathfrak{y}^2) - 2\lambda(1 - \mathfrak{x}\mathfrak{y}) + (1 - \mathfrak{x}^2) = 0,$$
$$\lambda^2 C - 2\lambda B + A = 0, \qquad (*)$$

wobei $A = 1 - \mathfrak{x}^2$, $\quad B = 1 - \mathfrak{x}\mathfrak{y}$, $\quad C = 1 - \mathfrak{y}^2$.

Wegen $\mathfrak{x}^2 < 1$ und $\mathfrak{y}^2 < 1$ ist übrigens $A > 0$ und $C > 0$; nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist außerdem $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2 \leqq \mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 < 1$, also $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}| < 1$ und damit auch $B > 0$.

Gleichung (*) hat die Lösungen

$$\lambda_{u,v} = \frac{1}{C}(B \pm \sqrt{B^2 - AC}) > 0.$$

Bei der Normierung $\delta = \lambda_u : \lambda_v > 1$ ist $\lambda_u > \lambda_v$ und damit

$$\delta = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{B - \sqrt{B^2 - AC}} \qquad (1)$$

(wobei die Wurzel jeweils positiv zu nehmen ist).

Definiert man wie üblich[2]) als (hyperbolischen) Abstand der Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Zahl $\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \frac{1}{2}\log\delta$, so ist

$$\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \frac{1}{2}\log\frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{B - \sqrt{B^2 - AC}}.$$

Man sieht, daß diese Formel auch für $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ gilt, falls man gleichen Punkten den Abstand 0 zuordnet.

---

[1]) Diese Berechnung (bis zu Formel (1)) übernehme ich im wesentlichen aus Efimow [4] § 177.5.

[2]) Siehe Baldus [3] S. 81.

Nun hat man für die Umkehrung $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}$ des Cosinus hyperbolicus ($\mathfrak{Cof}$) die Beziehung

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\xi = \log\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)^2 = \frac{1}{2}\log\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}.$$

Für $\xi = \dfrac{B}{\sqrt{AC}}$ ergibt sich also

$$\overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{B}{\sqrt{AC}}, \tag{2}$$

d. h.

$$\mathfrak{Cof}\,\overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}} = \frac{B}{\sqrt{AC}},$$

$$\mathfrak{Cof}\,\overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}} = \frac{1 - \mathfrak{x}\,\mathfrak{y}}{\sqrt{(1 - \mathfrak{x}^2)(1 - \mathfrak{y}^2)}}. \tag{3}$$

Daraus erhalten wir nun unmittelbar ein Kriterium der gesuchten Art. Da der Logarithmus, der Cosinus hyperbolicus und die Quadratfunktion ($f(x) = x^2$) auf der positiven Halbachse eineindeutig sind, trifft die (mit Hilfe der Streckenkongruenz definierte) Relation der Abstandsgleichheit genau dann auf Modellpunkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ zu, wenn die (oben definierten) Abstände $\overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}}$ und $\overline{\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}'}$ bzw. deren Cosinus hyperbolici bzw. die Quadrate davon gleich sind. Also gilt der

Satz: *Es ist* $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ *abstandsgleich* $\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}'$ *genau dann, wenn*

$$\frac{(1 - \mathfrak{x}\,\mathfrak{y})^2}{(1 - \mathfrak{x}^2)(1 - \mathfrak{y}^2)} = \frac{(1 - \mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}')^2}{(1 - \mathfrak{x}'^2)(1 - \mathfrak{y}'^2)}. \tag{4}$$

Wenn wir die Abstandsgleichheit von Punkten von $\mathfrak{R}_R$ ganz-rational durch ihre Koordinaten ausdrücken wollen, können wir in (4) noch die Nenner heraufmultiplizieren.

Wir kommen nun zur Bildung der arithmetischen Reduzierten.

Dabei ordnen wir jeder Punktvariablen A_i drei Variablen x_{3i}, x_{3i+1}, x_{3i+2} für reelle Zahlen zu, die wir zur Abkürzung mit x_i', x_i'', x_i''' bezeichnen (und später als Koordinaten von A_i deuten).

Wir erklären $Rdz(H)$ induktiv entsprechend der Definition des prädikatenlogischen Aufbaus von H durch die folgenden Bestimmungen:

(1) $Rdz\,(A_i = A_j) = x_i' = x_j' \wedge x_i'' = x_j'' \wedge x_i''' = x_j'''$.

$Rdz\,(A_i\,A_j\,agl\,A_k\,A_l) =$

$$\left(1 - (x_i'x_j' + x_i''x_j'' + x_i'''x_j''')\right)^2 \left(1 - (x_k'^2 + x_k''^2 + x_k'''^2)\right)\left(1 - (x_l'^2 + x_l''^2 + x_l'''^2)\right)$$
$$= \left(1 - (x_k'x_l' + x_k''x_l'' + x_k'''x_l''')\right)^2 \left(1 - (x_i'^2 + x_i''^2 + x_i'''^2)\right)\left(1 - (x_j'^2 + x_j''^2 + x_j'''^2)\right).$$

(2) $Rdz\,(\sim H) = \sim Rdz\,(H)$.

$Rdz\,(H_1 \wedge H_2) = \left(Rdz\,(H_1) \wedge (H_2)\right)$.

$Rdz\,(H_1 \vee H_2) = \left(Rdz\,(H_1) \vee Rdz\,(H_2)\right)$.

$Rdz\,(H_1 \to H_2) = \left(Rdz\,(H_1) \to Rdz\,(H_2)\right)$.

$Rdz\,(H_1 \leftrightarrow H_2) = \left(Rdz\,(H_1) \leftrightarrow Rdz\,(H_2)\right)$.

$Rdz\,(\forall A_i\,H) = \forall x_i'\,\forall x_i''\,\forall x_i'''\left(x_i'^2 + x_i''^2 + x_i'''^2 < 1 \to Rdz\,(H)\right)$.

$Rdz\,(\exists A_i\,H) = \exists x_i'\,\exists x_i''\,\exists x_i'''\,(x_i'^2 + x_i''^2 + x_i'''^2 < 1 \wedge Rdz\,(H))$.

Man überzeugt sich leicht davon, daß eine Variable A_i in einem Ausdruck H der Punktgeometrie dann und nur dann frei bzw. gebunden vorkommt, wenn $x_i^{(\mu)}$ frei bzw. gebunden in $Rdz(H)$ vorkommt ($\mu = 1, 2, 3$). Ist insbesondere H eine Aussage (der Punktgeometrie), so ist auch $Rdz(H)$ eine Aussage (der ARZ).

Eine Belegung f über $\mathfrak{R}_R$ und eine Belegung $\mathfrak{f}$ über R derart, daß $f(A_i)$ das Tripel der reellen Zahlen $\mathfrak{f}(x_i')$, $\mathfrak{f}(x_i'')$, $\mathfrak{f}(x_i''')$ ist (für alle natürlichen i), wollen wir *arithmetisch verbunden* nennen.

Dann gilt zunächst das

Theorem 1'': *Wenn H Ausdruck der Punktgeometrie ist, so gilt für jedes Paar arithmetisch verbundener Belegungen f, $\mathfrak{f}$:*

$$f Erfg H \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{f} Erfz Rdz(H).$$

Man beweist es etwa induktiv entsprechend der Definition des prädikatenlogischen Aufbaus von H als Ausdruck der Punktgeometrie. Dazu braucht man im Anfangsschritt der Induktion, und zwar für den Fall, daß H die Form $A_iA_jaglA_kA_l$ hat, gerade den Satz S. 159 über die Charakterisierung der Abstandsgleichheit in $\mathfrak{R}_R$ (falls H die Form $A_i = A_j$ hat, ist die Behauptung trivial). Im übrigen bereitet der Beweis keine besonderen Schwierigkeiten und soll hier nicht näher ausgeführt werden.

Für Aussagen hängt nun bekanntlich die Erfüllung gar nicht von der Belegung ab, d. h., eine Aussage wird von allen Belegungen oder von gar keiner Belegung erfüllt. Ist also H eine Aussage der Punktgeometrie (und damit $Rdz(H)$ eine Aussage der ARZ) und sind f, $\mathfrak{f}$ beliebig gewählte arithmetisch verbundene Belegungen, so ist einerseits $aggH$ gleichwertig mit $fErfgH$ und andererseits $agz\,Rdz(H)$ gleichwertig mit $\mathfrak{f}Erfz\,Rdz(H)$. Somit führt Theorem 1'' unmittelbar auf das zu beweisende Theorem 1'.[1])

2. Die Bildung der geometrischen Reduzierten und der Beweis von Theorem 2' laufen auf eine geometrische Beschreibung der Arithmetik oder eine Nachbildung der Arithmetik in der EHG hinaus. Wir haben jetzt gewisse geometrische Gebilde auszuwählen, die den reellen Zahlen (d. h. den Grundgebilden der Arithmetik) entsprechen[2]), und für sie so etwas wie eine „geometrische Arithmetik" aufzubauen, in der entsprechende Sätze zu denen der ARZ gelten. Da das angestrebte Theorem 2' von der Beweisbarkeit von Ausdrücken handelt, sind die Konstruktionen auf Grund der Axiome und nicht nur in speziellen Modellen durchzuführen.

---

[1]) Will man Theorem 1' wie in [13] für beliebige Ausdrücke der Punktgeometrie erhalten, so hat man in diesem Theorem für Ausdrücke H mit freien Variablen eine zweite Reduzierte einzuführen, nämlich etwa $\left(\bigwedge_{\nu=1}^{n} x_{i_\nu}'^2 + x_{i_\nu}''^2 + x_{i_\nu}'''^2 < 1 \to Rdz(H)\right)$, wobei $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ die in H frei vorkommenden Variablen (in irgendeiner Reihenfolge) sind.

[2]) Bei der Bildung der arithmetischen Reduzierten entsprachen umgekehrt den Punkten (d. h. den Grundgebilden der Punktgeometrie) gewisse arithmetische Gebilde, jedem Punkt entsprachen nämlich drei reelle Zahlen, deren Quadratsumme kleiner als 1 war.

Die eben skizzierte Aufgabe wurde im wesentlichen bereits durch die „Endenrechnung" in HILBERT [7] gelöst. Die dort angestellten Überlegungen sind allerdings nicht alle im Rahmen einer elementaren Theorie durchgeführt, insbesondere gehören die dort betrachteten Enden nicht zu den Grundgebilden der EHG. Wir werden jedoch eine für unsere Zwecke genügende „geometrische Arithmetik" erhalten, wenn wir statt dieser Enden die Geraden in einer Ebene durch ein festes Ende (nämlich die Verbindungsgeraden dieser Enden mit dem sog. Ende ∞) verwenden, also die Geraden eines Büschels, das wir „Zahlenbüschel" nennen wollen (in Analogie zur "Zahlengeraden" in der euklidischen Geometrie).

Zum besseren Verständnis der folgenden Definitionen beschreiben wir unsere „Arithmetik im Zahlenbüschel" zunächst rein inhaltlich, so als hätten wir es mit einer nicht formalisierten Theorie zu tun.

Wir gehen aus von zwei verschiedenen, zueinander parallelen Geraden o und e. Die Menge der Geraden, die durch das den Geraden o und e gemeinsame Ende gehen und mit o und e in einer Ebene liegen, nennen wir das durch o und e bestimmte *Zahlenbüschel*; o und e nennen wir die *Null-* und die *Einheitsgerade* dieses Büschels. Von dem nicht auf o liegenden Ende von e fällen wir das Lot e' auf o und bezeichnen seinen Fußpunkt mit E. Die Geraden des Zahlenbüschels, die mit e auf derselben Seite von o liegen, nennen wir *geometrisch positiv*; die auf der anderen Seite von o liegenden Geraden des Zahlenbüschels nennen wir *geometrisch negativ*.

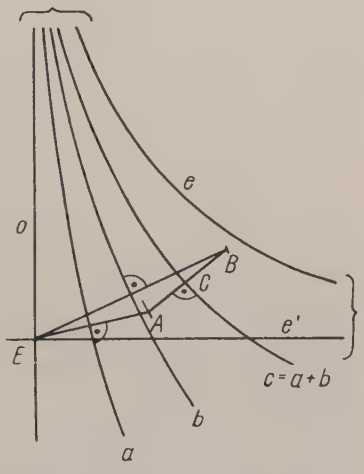


Abb. 9

Die *geometrische Summe* beliebiger Geraden a und b des Zahlenbüschels erklären wir folgendermaßen (vgl. Abb. 9): Wir spiegeln E an a und b, die Spiegelbilder seien A bzw. B, der Mittelpunkt der Strecke AB sei C (falls A und B zusammenfallen, setzen wir $C = A = B$). Die durch C gehende Gerade c des Zahlenbüschels ist dann die geometrische Summe von a und b.

Das *geometrische Produkt* beliebiger Geraden a und b des Zahlenbüschels erklären wir wie folgt (vgl. Abb. 10). Von den nicht auf o liegenden Enden von a und b fällen wir, falls a und b von o verschieden sind, die Lote a' bzw. b' auf o und bezeichnen ihre Fußpunkte mit A bzw. B. Auf o tragen wir die Strecke EA von B aus in derselben Richtung ab, in der A von E aus liegt, bis zu einem Punkt C (falls $A = E$ ist, setzen wir $C = B$, sonst sind also die Strecken EA und BC gleich gerichtet und gleich lang). In der Ebene des Zahlenbüschels errichten wir das Lot c' auf o in C. Nun gibt es genau zwei Geraden des Zahlenbüschels, die mit c' ein Ende gemeinsam haben, und zwar eine (geometrisch) positive und eine (geometrisch) negative Gerade (nämlich die Verbindungsgeraden des gemeinsamen Büschelendes

mit je einem Ende von c'). Das geometrische Produkt c ist die positive dieser beiden Geraden, wenn a und b beide positiv oder beide negativ sind; es ist die negative, wenn von den Geraden a und b eine positiv und die andere negativ ist. Falls eine der Geraden a und b gleich o ist, so ist auch das geometrische Produkt von a und b die Gerade o.

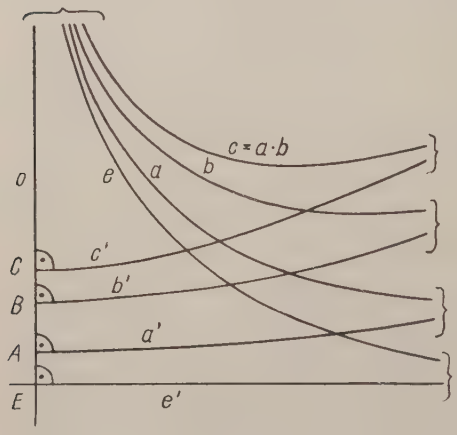


Abb. 10

Hilbert geht in seiner Endenrechnung nicht von den Geraden o und e aus, sondern (in unseren Bezeichnungen) von den mit einer Orientierung versehenen Geraden o und e', die als aufeinander senkrecht stehend vorausgesetzt werden. Dadurch sind aber o und e eindeutig festgelegt, ebenso wie umgekehrt durch o und e die Geraden o und e' und ihre Orientierung festgelegt sind. Weiter verwendet Hilbert an Stelle der Geraden des Zahlenbüschels die Enden dieser Geraden, die vom gemeinsamen Büschelende — welches bei ihm die Bezeichnung ∞ trägt — verschieden sind. Unsere Definitionen für die geometrischen Rechenoperationen sind die genaue Übertragung der Hilbertschen Definitionen, wobei einem beliebigen von ∞ verschiedenen Ende die Verbindungsgerade dieses Endes mit dem Ende ∞ entspricht. Damit lassen sich auch die Sätze aus der Hilbertschen Endenrechnung ohne weiteres in unsere Arithmetik im Zahlenbüschel übertragen, wovon nachher Gebrauch gemacht werden wird.

Den obigen Konstruktionen entsprechend führen wir nun in der formalisierten EHG die folgenden Definitionen ein.

$a_2, \ldots, a_n$ liegen arithmetisch zu a_0 und a_1 ($a_2, \ldots, a_n$ gehören zu dem durch a_0 und a_1 bestimmten Zahlenbüschel):

$$Ar_{a_0 a_1} a_2 \ldots a_n \underset{\text{Df}}{=\!=} a_0 \neq a_1 \wedge End a_0 a_1 \ldots a_n \wedge Eb a_0 a_1 \ldots a_n \quad (n \geqq 1).$$

Für die Bezeichnung von Null- und Einheitsgerade in einem Zahlenbüschel reservieren wir im Formalismus die Variablen a_0 und a_1. Aus schreibtechnischen Gründen wollen wir für a_0 und a_1 auch die Abkürzungen o und e verwenden.

Das Lot von einem Ende von a auf o ist a', sein Fußpunkt ist A:

$$a\, o Lef a' A \underset{\text{Df}}{=\!=} End a' a \wedge a' \perp o \wedge a'\, o Schn A.$$

(Da diese Konfiguration im folgenden mehrfach vorkommt, führen wir dafür eine besondere Abkürzung ein.)

a, b ergeben in bezug auf o, e als geometrische Summe c:

$$ab\,Su_{oe}c \underset{\text{Df}}{=} Ar_{oe}abc \wedge \exists e' \exists E \exists A \exists B \exists C (eo\,Lef e'E \wedge ESp_a A \wedge ESp_b B \wedge ASp_C B \wedge InzCc).$$

a, b ergeben in bezug auf o, e als geometrisches Produkt c:

$$\begin{aligned} ab\,Pr_{oe}c \underset{\text{Df}}{=} Ar_{oe}abc \wedge \big((a = o \wedge c = o) \vee (b = o \wedge c = o) \\ \vee \exists e' \exists a' \exists b' \exists c' \exists E \exists A \exists B \exists C (eo\,Lef e'E \\ \wedge ao\,Lef a'A \wedge bo\,Lef b'B \wedge co\,Lef c'C \\ \wedge EA\,agl\,BC \wedge (A \underset{E}{\cong} B \leftrightarrow ZwEBC) \wedge (B = E \rightarrow C = A) \\ \wedge (c \underset{o}{\cong} e \leftrightarrow a \underset{o}{\cong} b))\big). \end{aligned}$$

Die vorletzte Zeile in dieser Definition ist unter der (hier gegebenen) Voraussetzung $GrEABC$ übrigens gleichwertig mit $\exists S (ASp_S B \wedge ESp_S C)$ (es gibt einen Punkt S, zu dem sowohl A und B als auch E und C spiegelbildlich liegen).

In Hilbert [7] wird nachgewiesen, daß man in der Definition der Summe statt des konstruierten Punktes E einen beliebigen Punkt der Geraden o verwenden kann und daß seine Spiegelbilder A und B (an a bzw. b) auch zu der Geraden c spiegelbildlich liegen. Dementsprechend ist beweisbar:

$$InzEo \rightarrow \big(ab\,Su_{oe}c \leftrightarrow Ar_{oe}abc \wedge \exists A \exists B \exists C (ESp_a A \wedge ESp_b B \wedge ASp_C B \wedge InzCc)\big).$$

$$InzEo \rightarrow \big(ab\,Su_{oe}c \leftrightarrow Ar_{oe}abc \wedge \exists A \exists B (ESp_a A \wedge ESp_b B \wedge ASp_c B)\big).$$

Wenn a und b arithmetisch zu o, e liegen, ist ihre geometrische Summe eindeutig bestimmt. Andernfalls ist ihre Summe im anschaulichen Sinne nicht erklärt, und es gibt keine Gerade c, so daß die vorher erklärte Summenrelation zutrifft. Bei der folgenden Einführung eines ι-Terms zur Bezeichnung des Resultats der geometrischen Addition wählen wir in diesem Falle als geometrische Summe von a und b in bezug auf o, e die Gerade o, um die geometrische Summe überhaupt irgendwie eindeutig festzusetzen. Entsprechendes gilt für die weiteren hier behandelten Operationen.

Die geometrische Summe von a und b in bezug auf o, e:

$$Su_{oe}(a, b) \underset{\text{Df}}{=} \iota c \big(ab\,Su_{oe}c \vee (\sim Ar_{oe}ab \wedge c = o)\big).$$

(Diejenige Gerade c, für die die Summenrelation zutrifft oder die — falls a, b nicht arithmetisch zu o, e liegen — gleich o ist.)

Das geometrische Produkt von a und b in bezug auf o, e:

$$Pr_{oe}(a, b) \underset{\text{Df}}{=} \iota c \big(ab\,Pr_{oe}c \vee (\sim Ar_{oe}ab \wedge c = o)\big).$$

Die zu a in bezug auf o, e geometrisch inverse Gerade:

$$Iv_{oe}(a) \underset{\text{Df}}{=} \iota b\,(ba\,Su_{oe}o \vee (\sim Ar_{oe}a \wedge b = o)).$$

Falls die geometrischen Rechenoperationen auf o und e (d. h. auf a_0 und a_1) (als Null- und Einheitsgerade des Zahlenbüschels) bezogen sind, wollen wir auf die Angabe der Bezugsgeraden verzichten und die folgenden kürzeren Schreibweisen einführen.

$$(a \underset{g}{+} b) \underset{\text{Df}}{=} Su_{oe}(a, b).$$

$$(a \underset{g}{\cdot} b) \underset{\text{Df}}{=} Pr_{oe}(a, b).$$

$$\underset{g}{-} a \underset{\text{Df}}{=} Iv_{oe}(a).$$

(Das sind jedoch Terme, die a_0 und a_1 als freie Variablen enthalten!)

Das geometrische Quadrat von a (in bezug auf o, e):

$$a^2 \underset{\text{Df}}{=} a \underset{g}{\cdot} a.$$

Die geometrische Differenz von a und b:

$$(a \underset{g}{-} b) \underset{\text{Df}}{=} (a \underset{g}{+} \underset{g}{-} b).$$

Der geometrische Quotient von a und b:

$$\frac{a}{b} \underset{\text{Df}}{=} \iota c\big((Ar_{oe}abc \wedge b \neq o \wedge c \underset{g}{\cdot} b = a) \vee (\sim(Ar_{oe}ab \wedge b \neq o) \wedge c = o)\big).$$

a ist geometrisch positiv in bezug auf o, e:

$$Pos_{oe}a \underset{\text{Df}}{=} Ar_{oe}a \wedge a \underset{o}{\cong} e.$$

$$pos_g a \underset{\text{Df}}{=} Pos_{oe}a.$$

a ist geometrisch kleiner als b:

$$a \underset{g}{<} b \underset{\text{Df}}{=} pos_g(b \underset{g}{-} a).$$

a ist geometrisch kleiner oder gleich b:

$$a \underset{g}{\leqq} b \underset{\text{Df}}{=} a \underset{g}{<} b \vee a = b.$$

Die geometrische Wurzel aus a:

$$\sqrt{a} \underset{\text{Df}}{=} \iota b\big((Ar_{oe}ab \wedge b^2 = a \wedge o \underset{g}{\leqq} b) \vee (\sim(Ar_{oe}a \wedge o \underset{g}{\leqq} a) \wedge b = o)\big).$$

Den Index g werden wir auch weglassen, wenn keine Verwechslungen mit den entsprechenden Bezeichnungen in der ARZ zu befürchten sind.

Wir kommen nun zur Bildung der geometrischen Reduzierten.

Dabei ordnen wir jeder Variablen x_i für reelle Zahlen eine Geradenvariable a_{2i+2} zu, die wir zur Abkürzung mit b_i bezeichnen (und später als Gerade des durch a_0 und a_1 bestimmten Zahlenbüschels deuten).

Zunächst ordnen wir jedem Term $\mathfrak{T}$ der ARZ einen entsprechenden Term $Rdt(\mathfrak{T})$ der EHG (hier mit bestimmtem Artikel), *die Termreduzierte von* $\mathfrak{T}$, zu durch die folgenden Bestimmungen:

(1) $Rdt(0) = o.$

$Rdt(1) = e.$

$Rdt(x_i) = b_i.$

(2) $Rdt(\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2) = (Rdt(\mathfrak{T}_1) \underset{g}{+} Rdt(\mathfrak{T}_2)).$

$Rdt(-\mathfrak{T}) = \underset{g}{-} Rdt(\mathfrak{T}).$

$Rdt(\mathfrak{T}_1 \cdot \mathfrak{T}_2) = (Rdt(\mathfrak{T}_1) \underset{g}{\cdot} Rdt(\mathfrak{T}_2)).$

Als gebundene Geradenvariablen in diesen Termen verwenden wir solche der Form a_{2i+3} (der Eindeutigkeit der Definition wegen etwa von jeder Sorte die in Frage kommenden Variablen mit kleinstem Index, die nicht in den zusammenzusetzenden Termen vorkommen).

Sodann ordnen wir jedem Ausdruck $\mathfrak{H}$ der ARZ einen Ausdruck $Rdgv(\mathfrak{H})$ der EHG, *die vorläufige geometrische Reduzierte von* $\mathfrak{H}$, zu durch die folgenden Bestimmungen:

(1) $Rdgv(\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2) = Rdt(\mathfrak{T}_1) = Rdt(\mathfrak{T}_2).$

$Rdgv(pos\,\mathfrak{T}) = pos_g Rdt(\mathfrak{T}).$

(2) $Rdgv(\sim\mathfrak{H}) = \sim Rdgv(\mathfrak{H}).$

$Rdgv(\mathfrak{H}_1 \wedge \mathfrak{H}_2) = (Rdgv(\mathfrak{H}_1) \wedge Rdgv(\mathfrak{H}_2)).$

$Rdgv(\mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2) = (Rdgv(\mathfrak{H}_1) \vee Rdgv(\mathfrak{H}_2)).$

$Rdgv(\mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_2) = (Rdgv(\mathfrak{H}_1) \rightarrow Rdgv(\mathfrak{H}_2)).$

$Rdgv(\mathfrak{H}_1 \leftrightarrow \mathfrak{H}_2) = (Rdgv(\mathfrak{H}_1) \leftrightarrow Rdgv(\mathfrak{H}_2)).$

$Rdgv(\forall x_i \mathfrak{H}) = \forall b_i (Ar_{oe} b_i \rightarrow Rdgv(\mathfrak{H})).$

$Rdgv(\exists x_i \mathfrak{H}) = \exists b_i (Ar_{oe} b_i \wedge Rdgv(\mathfrak{H})).$

Man überzeugt sich leicht davon, daß eine Variable x_i in einem Ausdruck $\mathfrak{H}$ der ARZ dann und nur dann frei bzw. gebunden vorkommt, wenn b_i frei bzw. gebunden in $Rdgv(\mathfrak{H})$ vorkommt, und daß in Ausdrücken (der EHG) der Form $Rdgv(\mathfrak{H})$ als freie Variablen außer a_0 und a_1 nur solche der Form b_i in Frage kommen.

Die *geometrische Reduzierte* eines beliebigen Ausdrucks $\mathfrak{H}$ der ARZ erklären wir nun durch die Bestimmung:

$$Rdg(\mathfrak{H}) = \forall o\, \forall e (Ar_{oe} a_{i_1} \ldots a_{i_n} \rightarrow Rdgv(\mathfrak{H})),$$

wobei $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ die außer o und e (d. h. a_0 und a_1) in $Rdgv(\mathfrak{H})$ frei vorkommenden Variablen (etwa in der Reihenfolge ihres letzten Auftretens) sind.

Das Theorem 2′ (S. 156) kann nun induktiv gemäß der Definition von $\vdash_z \mathfrak{H}$ bewiesen werden. Im Anfangsschritt der Induktion ist dabei zu zeigen, daß die geometrischen Reduzierten der Axiome der ARZ in der EHG beweisbar sind. Für die der logischen Axiome ist das leicht zu sehen, die der eigentlichen Axiome sind im wesentlichen[1]) die folgenden Sätze.

14. $Ar_{oe}\,a\,b\,c \to a + (b + c) = (a + b) + c.$
15. $Ar_{oe}\,a \to o + a = a.$
16. $Ar_{oe}\,a \to -a + a = o.$
17. $Ar_{oe}\,a\,b\,c \to a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$
18. $Ar_{oe}\,a \to e \cdot a = a.$
19. $Ar_{oe}\,a \wedge a \neq o \to \exists b\,(Ar_{oe}\,b \wedge b \cdot a = e).$
20. $Ar_{oe}\,a\,b\,c \to (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$
21. $Ar_{oe}\,a\,b\,c \to a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$
22. $Ar_{oe} \to o \neq e.$
23. $Ar_{oe} \to \sim pos\,o.$
24. $Ar_{oe}\,a \to pos\,a \vee a = o \vee pos\,{-a}.$
25. $Ar_{oe}\,a\,b \wedge pos\,a \wedge pos\,b \to pos\,(a + b).$
26. $Ar_{oe}\,a\,b \wedge pos\,a \wedge pos\,b \to pos\,(a \cdot b).$
27. $Ar_{oe} \wedge \forall a\,(Ar_{oe}\,a \to H_1(a) \vee H_2(a)) \wedge \exists a\,(Ar_{oe}\,a \wedge H_1(a))$
$\wedge \exists a\,(Ar_{oe}\,a \wedge H_2(a)) \wedge \forall a \forall b\,(Ar_{oe}\,a\,b \wedge H_1(a) \wedge H_2(b) \to a < b)$
$\to \exists a^*\,(Ar_{oe}\,a^* \wedge \forall a\,(Ar_{oe}\,a \wedge H_1(a) \to a \leqq a^*) \wedge \forall a\,(Ar_{oe}\,a \wedge H_2(a) \to a^* \leqq a)),$
wobei $H_1(a)$ und $H_2(a)$ beliebige Ausdrücke sind, in denen a^* und b nicht vorkommen.

Weiter ist zum Beweis von Theorem 2′ zu zeigen, daß die Anwendung der Schlußregeln in der ARZ von Ausdrücken mit beweisbaren geometrischen Reduzierten wieder zu Ausdrücken mit beweisbaren geometrischen Reduzierten führt (Induktionsschritt). Das läßt sich für die einzelnen Schlußregeln der ARZ leicht nachprüfen und soll hier nicht näher ausgeführt werden. Man braucht dazu noch die folgenden Sätze.

28. $Ar_{oe}\,b_1 \ldots b_n \leftrightarrow Ar_{oe} \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{n} Ar_{oe}\,b_\nu.$
29. $Ar_{oe} \to Ar_{oe}\,o.$
30. $Ar_{oe} \to Ar_{oe}\,e.$
31. $Ar_{oe}\,a\,b \to Ar_{oe}\,(a + b).$
32. $Ar_{oe}\,a\,b \to Ar_{oe}\,(a \cdot b).$
33. $Ar_{oe}\,a \to Ar_{oe}\,{-a}.$

[1]) In diesen Sätzen wurde gegenüber den geometrischen Reduzierten der Axiome der ARZ vor allem die „Generalisierung" mit $\forall o \forall e$ weggelassen. Dadurch und durch andere geringfügige Umformungen wird jedoch an der Beweisbarkeit der betreffenden Ausdrücke nichts geändert. Satz 27. brauchte nur für spezielle Ausdrücke $H_1(a)$ und $H_2(a)$, die insbesondere nur Geradenvariablen als freie Variablen enthalten, bewiesen zu werden und unter der zusätzlichen Voraussetzung $Ar_{oe}\,a_{i_1} \ldots a_{i_n}$, wenn $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ diese freien Variablen (außer a, o, e) sind. Er erweist sich jedoch sogar in der angegebenen Form als beweisbar.

Als Hauptaufgabe beim Beweis von Theorem 2′ bleibt also der Beweis (genauer der Nachweis für die Beweisbarkeit) der Ausdrücke 14. bis 33. (Diese Ausdrücke sind Sätze über die „Arithmetik im Zahlenbüschel". In diesem Sinne läuft also der Beweis von Theorem 2′ auf eine Nachbildung der Arithmetik in der EHG hinaus.) Satz 22. ist trivial auf Grund der Definition von Ar_{oe}. Die übrigen der Sätze 14. bis 26. wurden im wesentlichen in HILBERT [7] bewiesen. Satz 27. ergibt sich aus den Stetigkeitsaxiomen der EHG, wie in § 5 gezeigt werden wird. Die Sätze 28. bis 33. ergeben sich ohne weiteres aus unseren Konstruktionen bei der Einführung der Arithmetik im Zahlenbüschel.[1] [2]) Damit wäre dann Theorem 2′ bewiesen.

3. Der Beweis von Theorem 3′ läuft hinaus auf eine Nachbildung der (bei der Bildung der arithmetischen Reduzierten vorgenommenen) arithmetischen Beschreibung des Modells $\mathfrak{R}_R$ in der EHG mit Hilfe der (bei der Bildung der geometrischen Reduzierten eingeführten) Arithmetik im Zahlenbüschel. Wir haben also jetzt, und zwar allein auf Grund der Axiome der EHG (da Theorem 3′ von der Beweisbarkeit von Ausdrücken handelt), ein Koordinatensystem einzuführen, in welchem jedem Punkt als Koordinaten drei Geraden eines Zahlenbüschels zugeordnet werden. Dabei müssen zwischen den Punkten und ihren Koordinaten gewisse Beziehungen bestehen, die den Beziehungen zwischen den Punkten von $\mathfrak{R}_R$ und ihren Koordinaten (das waren reelle Zahlen) völlig entsprechen.

Um ein solches Koordinatensystem zu finden, betrachten wir zunächst ein Zahlenbüschel im KLEINschen Kugelmodell $\mathfrak{K}_R$. Den Punkten der Eichfläche $\mathfrak{x}^2 = 1$ entsprechen in $\mathfrak{K}_R$ bekanntlich die Enden in dem Sinne, daß Geraden des Modells genau dann ein Ende gemein haben, wenn sie durch einen Punkt der Eichfläche gehen. Als Zahlenbüschel wählen wir nun die Menge der Modellgeraden, die in der x_1x_2-Ebene liegen und durch den Punkt $U = [0, 1, 0]$ (der dann dem Ende ∞ bei HILBERT entspricht) gehen. Die Geraden o und e (Null- und Einheitsgerade des Zahlenbüschels) wählen wir so, daß sie die x_1-Achse in den Punkten mit den Abszissen 0 und 1 schneiden. Dann ist o die x_2-Achse, die Gerade e' (in den Bezeichnungen von S. 161f.) die x_1-Achse und der Punkt E der Koordinatenursprung $\mathfrak{o}$. Wir werden sehen, daß wir einen Isomorphismus von diesem Zahlenbüschel auf die Menge der reellen Zahlen erhalten, wenn wir jeder Geraden des Zahlenbüschels die Abszisse des Punktes zuordnen, in dem sie die x_1-Achse schneidet.

---

[1]) Satz 28. hätten wir ganz vermeiden können; wir hätten dazu nur $Ar_{oe}b_1 \ldots b_n$ für $n \geqq 2$ gleich diesem Satz entsprechend zu definieren brauchen. Die Sätze 29. bis 33. ähneln gewissen Sätzen, die in TARSKI [16] S. 25 bei der „Relativierung der Quantifikatoren" (relativization of quantifiers) auftreten. (Im Sinne von TARSKI haben wir durch Theorem 2′ die „relativierte ARZ" „in der EHG interpretiert", nur mit dem Unterschied, daß wir für die Konstanten 0 und 1 keine entsprechenden Konstanten in der EHG einführen mußten, sondern Variablen o und e verwenden konnten. Dadurch tritt die dreistellige Relation $Ar_{oe}a$ an die Stelle einer einstelligen Relation und in vielen Sätzen die Prämisse Ar_{oe} an Stelle eines Axioms für entsprechende Konstanten.)

[2]) Die Sätze 31. bis 33. sind auf Grund unserer Konstruktionen sogar beweisbar, wenn die Prämisse $Ar_{oe}ab$ bzw. $Ar_{oe}a$ zu Ar_{oe} abgeschwächt wird.

Zunächst beweisen wir (vgl. Abb. 11) für das betrachtete Zahlenbüschel den folgenden

Hilfssatz: *Liegen die Punkte A und B der x_1x_2-Ebene hyperbolisch spiegelbildlich*[1]) *zu einer Geraden g des Zahlenbüschels, sind a, b die Büschelgeraden durch A bzw. B und A', G', B' die Schnittpunkte von a, g, b mit der x_1-Achse, so liegen A' und B' euklidisch spiegelbildlich zu G'.*

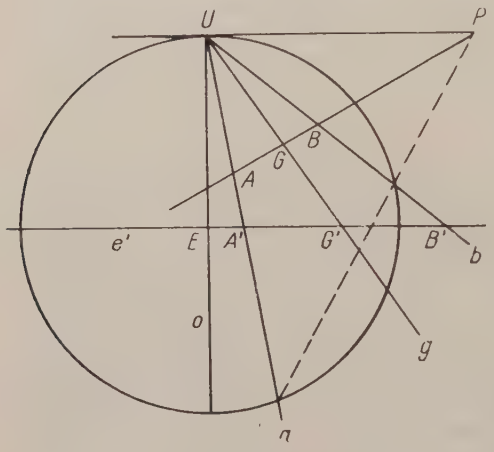


Abb. 11

Falls $A = B$ ist, liegt der Punkt $A = B$ auf g, und die Behauptung ist trivial. Seien nun A, B verschiedene Punkte.

Nach Voraussetzung sind A und B Modellpunkte, und durch die hyperbolische Spiegelung an g wird A in B und B in A übergeführt. Diese hyperbolische Spiegelung ist eine hyperbolische Bewegung, die g punktweise fest läßt, die x_1x_2-Ebene in sich überführt, aber in dieser Ebene die Seiten von g vertauscht. Damit führt sie auch den Kreis, den die x_1x_2-Ebene aus der absoluten Fläche ausschneidet, in sich über und läßt (als spezielle projektive Transformation) den Pol P von g in bezug auf diesen Kreis fest. Schließlich führt sie auch die Verbindungsgerade von A und P in sich über, da P und der Schnittpunkt G dieser Geraden mit g fest bleiben. Da A in B übergeführt wird, liegt auch B auf dieser Verbindungsgeraden (die auf g hyperbolisch senkrecht steht). Da auch B in A übergeführt wird, wird der vierte harmonische Punkt zu A, B, P übergeführt in den vierten harmonischen Punkt zu B, A, P (das ist aber dasselbe wie der vierte harmonische Punkt zu A, B, P), d. h., der vierte harmonische Punkt zu A, B, P bleibt fest. Da unsere Spiegelung nicht alle Punkte der Geraden durch A und B fest läßt, läßt sie höchstens zwei Punkte dieser Geraden fest. Da außer P noch G fest bleibt, ist also G der vierte harmonische Punkt zu A, B, P.

Nun liegt U auf g und damit P als Pol von g auf der Polaren von U in bezug auf den oben angegebenen Kreis, das ist die Tangente an diesen Kreis in U, also eine euklidische Parallele zur x_1-Achse. Die Projektion von U aus auf die x_1-Achse führt mithin P in den uneigentlichen Punkt P' der x_1-Achse über, die Punkte A, G, B dagegen in A', G', B'. Damit ist auch G' der vierte harmonische Punkt zu A', B', P'.

---

[1]) Geometrische Begriffe, die sich auf die übliche geometrische Deutung des dreidimensionalen Zahlenraumes R^3 als euklidischer Raum beziehen, wollen wir der Deutlichkeit halber mit dem Zusatz „euklidisch" versehen; geometrische Begriffe, die sich auf den hyperbolischen Raum $\mathfrak{R}_R$ beziehen, versehen wir dagegen mit dem Zusatz „hyperbolisch". (Vgl. Baldus [3] IV. und V. Abschnitt.)

Das bedeutet, da P' uneigentlich ist, daß G' der (euklidische) Halbierungspunkt der Strecke $A'B'$ ist, wie zu beweisen war.

Sei nun φ die Abbildung, die jeder Geraden unseres Zahlenbüschels die Abszisse ihres Schnittpunktes mit der x_1-Achse zuordnet. Dann ist φ selbstverständlich eine eineindeutige Abbildung vom Zahlenbüschel auf die Menge der reellen Zahlen.

Weiter gilt der

Satz: *Wenn* $ab\,Su_{oe}\,c$, *so* $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(c)$.

(D. h., φ ist ein Isomorphismus in bezug auf die Addition.)

Zum Beweis übertragen wir die Konstruktion der geometrischen Summe (S. 161f.) in unser Modell $\mathfrak{R}_R$ (vgl. Abb. 12) und bezeichnen die Büschelgeraden durch A und B mit a^* bzw. b^*. Die Geraden a und b mögen die x_1-Achse in den Punkten mit den Abszissen $\varphi(a) = x$ und $\varphi(b) = y$ schneiden. Da E und A hyperbolisch spiegelbildlich zu a liegen, liegen auf Grund des Hilfssatzes E und der Schnittpunkt von a^* mit der x_1-Achse euklidisch spiegelbildlich zum Schnittpunkt von a mit der x_1-Achse, d. h., a^* schneidet die x_1-Achse im Punkt mit der Abszisse $2x$. Ebenso schneidet b^* die x_1-Achse im Punkt mit der Abszisse $2y$. Da schließlich A und B hyperbolisch spiegelbildlich zu c liegen, liegen nach dem Hilfssatz die Punkte, in denen a^* und b^* die x_1-Achse schneiden, euklidisch spiegelbildlich zum Schnittpunkt von c mit der x_1-Achse, d. h., letzterer hat die Abszisse $\frac{2x + 2y}{2} = x + y$. Damit ist $\varphi(c) = x + y$, wie behauptet wurde.

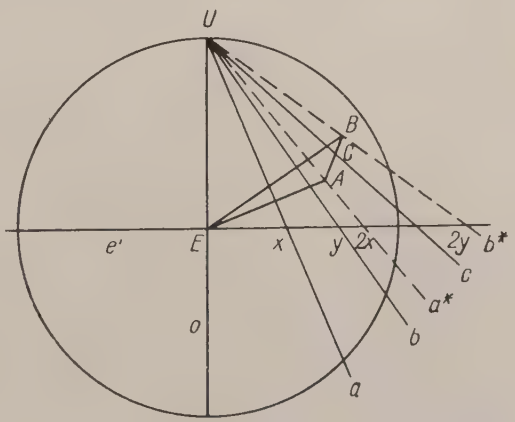


Abb. 12

Weiter ist sofort zu sehen, daß $\varphi(a)$ genau dann positiv ist, wenn a (geometrisch) positiv ist.

Auf Grund von Stetigkeitsbetrachtungen erhält man aus dem vorigen Satz, daß auch $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(c)$ ist, falls $ab\,Pr_{oe}\,c$ ist. (Das könnte man natürlich auch direkt nachrechnen.)

Somit gilt für die Abbildung φ der schon erwähnte

Satz: *φ ist ein Isomorphismus von dem durch o und e bestimmten Zahlenbüschel auf die Menge der reellen Zahlen (in bezug auf die in der Arithmetik betrachteten Operationen und Relationen).*[1])

[1]) Übrigens kann man die in beliebigen Zahlenbüscheln eingeführten Operationen ausdehnen auf den Bereich aller Geraden durch das der Null- und der Einheitsgeraden gemeinsame Ende

Nun erhalten wir zunächst in $\mathfrak{K}_R$ sofort ein Koordinatensystem der gewünschten Art, wenn wir statt der bisherigen (reellen) Koordinaten einfach die ihnen bei dem Isomorphismus φ entsprechenden Geraden verwenden. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes B lassen sich dann auf folgende Art gewinnen. Man zieht durch B die drei Ebenen, die auf den einzelnen Koordinatenachsen hyperbolisch senkrecht stehen (diese Ebenen stehen zugleich euklidisch senkrecht auf den Achsen, da letztere durch den euklidischen Mittelpunkt des Kugelmodells $\mathfrak{K}_R$ gehen), ihre Schnittpunkte mit den jeweiligen Koordinatenachsen seien B_1, B_2, B_3 (B_ν stimmt in der ν-ten Koordinate mit B überein ($\nu = 1, 2, 3$)). Die erste Koordinate b_1 von B ist dann die Gerade des Zahlenbüschels, die durch den Punkt B_1 geht. Die Punkte B_2 und B_3 überträgt man in die erste Koordinatenachse, so daß der Abstand vom Koordinatenursprung und die Orientierung (Lage auf der positiven oder negativen Koordinaten-Halbachse) erhalten bleiben. Die Büschelgeraden b_2, b_3 durch die so entstehenden Punkte sind dann die anderen beiden Koordinaten von B.

Ganz entsprechend gehen wir vor, wenn wir jetzt unabhängig von einem speziellen Modell Koordinaten in der EHG einführen. Natürlich brauchen wir dabei nicht das Zahlenbüschel wie oben an die Koordinatenachsen zu binden.

Seien g_1, g_2, g_3 drei Geraden, die in einem Punkt O paarweise aufeinander senkrecht stehen, und O_1, O_2, O_3 irgendwelche von O verschiedenen Punkte auf den einzelnen Geraden. Wir sagen in diesem Falle, daß g_1, g_2, g_3 mit O, O_1, O_2, O_3 ein *Koordinatensystem* bilden; g_1, g_2, g_3 nennen wir die *Koordinatenachsen*, O den *Ursprung* des Koordinatensystems. Die Punkte O_1, O_2, O_3 dienen zur Festlegung einer Orientierung auf den Koordinatenachsen. Von den Punkten O, O_1, O_2, O_3, durch die das Koordinatensystem schon bestimmt ist, wollen wir sagen, daß sie ein *Koordinatentetraeder* bilden. Seien außerdem Geraden o und e vorgegeben, die ein Zahlenbüschel bestimmen (also mit Ar_{oe}). Sei wieder e' das Lot von dem nicht auf o liegenden Ende von e auf o und E der Fußpunkt dieses Lots.

Die *ν-te Koordinate* eines beliebigen Punktes B (in bezug auf das angegebene Koordinatensystem und das angegebene Zahlenbüschel) erklären wir dann folgendermaßen ($\nu = 1, 2, 3$). Wir fällen von B die Lotebene β_ν auf die ν-te Koordinatenachse g_ν, sie schneide diese Achse im Punkte B_ν. Sodann konstruieren wir auf e' den Punkt B'_ν derart, daß B'_ν von E denselben Abstand hat wie B_ν von O und B'_ν genau dann mit e auf derselben Seite von o liegt, wenn B_ν mit O_ν auf derselben Seite von O liegt. Die Gerade b_ν des Zahlenbüschels durch den Punkt B'_ν ist dann die ν-te Koordinate (oder Koordinatengerade) von B. Übrigens kann man den Punkt B_ν nach bekannten Sätzen aus der absoluten Geometrie auch folgendermaßen erhalten. Auf die durch g_ν und g_μ gehende Ebene, wobei μ eine der beiden von ν verschiedenen Zahlen unter den Zahlen 1, 2, 3 ist, fällt man von B aus das

(„Zahlenbündel"), so daß speziell das in $\mathfrak{K}_R$ durch o und e bestimmte Zahlenbündel isomorph ist zur Menge der komplexen Zahlen. Überträgt man diese Operationen wieder auf die Enden (Endenrechnung in Analogie zu HILBERT [7] für die Enden der räumlichen hyperbolischen Geometrie), so ist der Bereich aller Enden (das Ende ∞ einbegriffen) isomorph zur RIEMANNschen Zahlenkugel.

Lot und vom Fußpunkt dieses Lots das Lot auf g_ν. Letzteres hat B_ν als Fußpunkt. B_ν ist auch der Fußpunkt des Lots von B auf g_ν. (Alle genannten Lote liegen in β_ν.)

Im Formalismus reservieren wir für die Bezeichnung der Bezugspunkte eines Koordinatensystems (der „Ecken" des Koordinatentetraeders) die Variablen A_0, A_1, A_2, A_3, für die wir aber der besseren Übersichtlichkeit wegen auch die Abkürzungen O, O_1, O_2, O_3 verwenden. (Für a_0, a_1 verwenden wir wieder die Abkürzungen o, e.)

Der obigen Konstruktion entsprechend definieren wir nun folgendes.

g_1, g_2, g_3 bilden mit O, O_1, O_2, O_3 ein Koordinatensystem:

$$g_1 g_2 g_3 Ks\, O O_1 O_2 O_3 \underset{\text{Df}}{=} \bigwedge_{\nu=1}^{3} (Inz\, O\, g_\nu \wedge Inz\, O_\nu\, g_\nu \wedge O_\nu \neq O)$$
$$\wedge g_1 \perp g_2 \wedge g_1 \perp g_3 \wedge g_2 \perp g_3.$$

O, O_1, O_2, O_3 bilden ein Koordinatentetraeder:

$$Kt\, O O_1 O_2 O_3 \underset{\text{Df}}{=} \exists g_1 \exists g_2 \exists g_3\; g_1\, g_2\, g_3 Ks\, O O_1 O_2 O_3.$$

B besitzt b_1, b_2, b_3 als Koordinaten(geraden) in bezug auf o, e, O, O_1, O_2, O_3:

$$B\, Kg^{o\,e}_{O\,O_1 O_2 O_3}\, b_1 b_2 b_3 \underset{\text{Lf}}{=} Ar_{oe}\, b_1 b_2 b_3$$
$$\wedge \exists e' \exists E \exists g_1 \exists g_2 \exists g_3 \exists \beta_1 \exists \beta_2 \exists \beta_3 \exists B_1 \exists B_2 \exists B_3 \exists B_1' \exists B_2' \exists B_3'$$
$$(e\, o\, Lef\, e'\, E \wedge g_1 g_2 g_3 Ks\, O O_1 O_2 O_3$$
$$\wedge \bigwedge_{\nu=1}^{3} (Inz\, B\, \beta_\nu \wedge g_\nu \perp \beta_\nu \wedge Inz\, B_\nu\, g_\nu \wedge Inz\, B_\nu\, \beta_\nu$$
$$\wedge Inz\, B_\nu'\, e' \wedge E\, B_\nu'\, agl\, O\, B_\nu \wedge Inz\, B_\nu' b_\nu \wedge (Pos_{oe}\, b_\nu \leftrightarrow B_\nu \mathrel{\overset{O}{\approx}} O_\nu))).$$

Wir kommen nun zum Beweis von Theorem 3′ (S. 156).

Dazu ist zunächst zu bemerken, daß sich die in diesem Theorem auftretende doppelte Reduziertenbildung auch ohne Benutzung der ARZ charakterisieren läßt. Zur Abkürzung setzen wir für beliebige Ausdrücke H der Punktgeometrie $Rdv(H) = Rdgv(Rdz(H))$ und $Rd(H) = Rdg(Rdz(H))$ und bezeichnen die bei der Bildung der geometrischen Reduzierten den Variablen x_i', x_i'', x_i''' (d. h. x_{3i}, x_{3i+1}, x_{3i+2}) zugeordneten Variablen b_{3i}, b_{3i+1}, b_{3i+2} (d. h. a_{6i+2}, a_{6i+4}, a_{6i+6}) mit a_i', a_i'', a_i'''. Dann ist nämlich

(1) $Rdv(A_i = A_j) = a_i' = a_j' \wedge a_i'' = a_j'' \wedge a_i''' = a_j'''$.

$Rdv(A_i A_j\, agl\, A_k A_l) =$

$(e - (a_i' a_j' + a_i'' a_j'' + a_i''' a_j'''))^2 (e - (a_k'^2 + a_k''^2 + a_k'''^2))\,(e - (a_l'^2 + a_l''^2 + a_l'''^2))$

$= (e - (a_i' a_l' + a_k' a_l'' + a_k''' a_l'''))^2 (e - (a_i'^2 + a_i''^2 + a_i'''^2))\,(e - (a_j'^2 + a_j''^2 + a_j'''^2))$.

(2) $Rdv(\sim H) = \sim Rdv(H)$.

$Rdv(H_1 \wedge H_2) = (Rdv(H_1) \wedge Rdv(H_2))$.

$Rdv(H_1 \bar{\vee} H_2) = (Rdv(H_1) \vee Rdv(H_2))$.

$Rdv(H_1 \to H_2) = (Rdv(H_1) \to Rdv(H_2))$.

$Rdv(H_1 \leftrightarrow H_2) = (Rdv(H_1) \leftrightarrow Rdv(H_2))$.

$Rdv(\forall A_i H) = \forall a_i' (Ar_{oe} a_i' \to \forall a_i'' (Ar_{oe} a_i'' \to \forall a_i''' (Ar_{oe} a_i'''$
$\to (a_i'^2 + a_i''^2 + a_i'''^2 < e \to Rdv(H)))))$. [1]

$Rdv(\exists A_i H) = \exists a_i' (Ar_{oe} a_i' \wedge \exists a_i'' (Ar_{oe} a_i'' \wedge \exists a_i''' (Ar_{oe} a_i'''$
$\wedge (a_i'^2 + a_i''^2 + a_i'''^2 < e \wedge Rdv(H)))))$.

Für Aussagen H der Punktgeometrie ist weiter
$Rd(H) = \forall o \forall e (Ar_{oe} \to Rdv(H))$.

Dann gilt zunächst das

Theorem 3'': *Für jeden Ausdruck H der Punktgeometrie ist*

$$\vdash_g KtOO_1O_2O_3 \wedge Ar_{oe} \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{n} A_{i_\nu} Kg^{oe}_{OO_1O_2O_3} a'_{i_\nu} a''_{i_\nu} a'''_{i_\nu} \to (H \leftrightarrow Rdv(H))\ ^{2}).$$

wenn $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ die in H frei vorkommenden Variablen sind.

Man kann es zunächst für die Ausdrücke H der Punktgeometrie beweisen, deren Variablen von den Variablen für die Bezugspunkte des Koordinatensystems verschieden sind (in denen also die Indizes der Variablen größer-gleich 4 sind), und zwar induktiv entsprechend der Definition des prädikatenlogischen Aufbaus von H als Ausdruck der Punktgeometrie. Im Anfangsschritt der Induktion benötigt man dazu die folgenden beiden Sätze.

34. $\bigwedge_{\nu=i,j} A_\nu Kg^{oe}_{OO_1O_2O_3} a'_\nu a''_\nu a'''_\nu \to (A_i = A_j \leftrightarrow a'_i = a'_j \wedge a''_i = a''_j \wedge a'''_i = a'''_j)$.

(Punkte A_i, A_j sind genau dann gleich, wenn ihre Koordinaten übereinstimmen.)

35. $\bigwedge_{\nu=i,j,k,l} A_\nu Kg^{oe}_{OO_1O_2O_3} a'_\nu a''_\nu a'''_\nu \to (A_i A_j agl A_k A_l$
$\leftrightarrow (e - (a'_i a'_j + a''_i a''_j + a'''_i a'''_j))^2 (e - (a'^2_k + a''^2_k + a'''^2_k))(e - (a'^2_l + a''^2_l + a'''^2_l))$
$= (e - (a'_k a'_l + a''_k a''_l + a'''_k a'''_l))^2 (e - (a'^2_i + a''^2_i + a'''^2_i))(e - (a'^2_j + a''^2_j + a'''^2_j)))$.

(Charakterisierung der Abstandsgleichheit zwischen Punkten durch eine Beziehung zwischen ihren Koordinaten.)

---

[1]) $Rdv(\forall A_i H)$ ist natürlich äquivalent mit

$$\forall a_i' \forall a_i'' \forall a_i''' (Ar_{oe} a_i' a_i'' a_i''' \wedge a_i'^2 + a_i''^2 + a_i'''^2 < e \to Rdv(H)),$$

$Rdv(\exists A_i H)$ ist äquivalent mit

$$\exists a_i' \exists a_i'' \exists a_i''' (Ar_{oe} a_i' a_i'' a_i''' \wedge a_i'^2 + a_i''^2 + a_i'''^2 < e \wedge Rdv(H)).$$

[2]) Die allgemeine Konjunktion in diesem Ausdruck soll weggelassen werden, falls $n = 0$ ist (d. h., falls H keine freien Variablen enthält).

Im Induktionsschritt (und zwar für die Quantifizierung[1])) braucht man noch folgende drei Sätze.

36. $B\,Kg^{oe}_{OO_1O_2O_3}\,b_1\,b_2\,b_3 \rightarrow Kt\,O\,O_1\,O_2\,O_3 \wedge Ar_{oe}\,b_1\,b_2\,b_3 \wedge b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 < e.$

(Wenn B in bezug auf o, e, O, O_1, O_2, O_3 die Koordinatengeraden b_1, b_2, b_3 besitzt, so bilden O, O_1, O_2, O_3 ein Koordinatentetraeder, b_1, b_2, b_3 liegen arithmetisch zu o, e, und ihre geometrische Quadratsumme ist kleiner als e.)

37. $Kt\,O\,O_1\,O_2\,O_3 \wedge Ar_{oe}\,b_1\,b_2\,b_3 \wedge b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 < e \rightarrow \exists\, B\; B\,Kg^{oe}_{OO_1O_2O_3}\,b_1\,b_2\,b_3.$

(Wenn die eben genannten Beziehungen für O, O_1, O_2, O_3, o, e, b_1, b_2, b_3 gelten, so gibt es einen Punkt B, der b_1, b_2, b_3 als Koordinatengeraden in bezug auf o, e, O, O_1, O_2, O_3 besitzt.)

38. $Kt\,O\,O_1\,O_2\,O_3 \wedge Ar_{oe} \rightarrow \forall\, B\,\exists\, b_1\,\exists\, b_2\,\exists\, b_3\; B\,Kg^{oe}_{OO_1O_2O_3}\,b_1\,b_2\,b_3.$

(Wenn O, O_1, O_2, O_3 ein Koordinatentetraeder bilden und o, e ein Zahlenbüschel bestimmen, so besitzt in bezug auf diese Bezugselemente jeder Punkt B Koordinatengeraden b_1, b_2, b_3.)

Durch nachträgliche Umbenennung von Variablen erhält man Theorem 3'' für beliebige Ausdrücke der Punktgeometrie.

Für Aussagen H der Punktgeometrie ergibt sich dann insbesondere

$$\vdash_g Kt\,O\,O_1\,O_2\,O_3 \wedge Ar_{oe} \rightarrow (H \leftrightarrow Rdv(H)).$$

Daraus erhält man die Behauptung des zu beweisenden Theorems 3' (nämlich $\vdash_g (H \leftrightarrow Rd(H))$) mit Hilfe der folgenden beiden Sätze.

39. $\exists O\,\exists O_1\,\exists O_2\,\exists O_3\,Kt\,OO_1O_2O_3.$

(Es gibt Punkte, die ein Koordinatentetraeder bilden.)

40. $\exists o\,\exists e\,Ar_{oe}.$

(Es gibt Geraden, die ein Zahlenbüschel bestimmen.)

Als Hauptaufgabe beim Beweis von Theorem 3' bleibt also der Beweis (genauer der Nachweis für die Beweisbarkeit) der Ausdrücke 34. bis 40. Bei den Sätzen 34., 38., 39., 40. ist an Hand der Definitionen ohne weiteres zu sehen, daß sie sich auf Grund der Axiome der EHG beweisen lassen. Die Sätze 35., 36., 37. sollen in § 5 bewiesen werden. Damit wäre dann Theorem 3' bewiesen und der Beweis des Vollständigkeitstheorems für die EHG zu Ende geführt.

Aus dem Satz S. 169 über den Isomorphismus zwischen dem in $\mathfrak{R}_R$ betrachteten Zahlenbüschel und der Menge der reellen Zahlen ergibt sich schon jetzt, daß die Sätze 34. bis 40. jedenfalls über $\mathfrak{R}_R$ allgemeingültig sind. Wenn es uns bei einigen dieser Sätze nicht gelungen wäre, sie aus unserem Axiomensystem ax zu beweisen,

[1]) Das heißt den Übergang von H zu $\forall A_t H$ (Generalisierung) bzw. $\exists A_t H$ (Partikularisierung).

hätten wir also die Möglichkeit gehabt, sie zu den Axiomen hinzuzunehmen, um trotzdem das Vollständigkeitstheorem beweisen zu können. Das wäre eine zwar unbefriedigende, aber doch immerhin überhaupt eine Lösung der Aufgabe gewesen, ein vollständiges Axiomensystem für die EHG (jetzt aufgefaßt als die Geometrie im Modell $\mathfrak{R}_R$) aufzustellen.

Da wir zum Beweis des Vollständigkeitstheorems an geometrischen Sätzen nichts weiter gebraucht haben als die Sätze 1. bis 40., bilden auch diese Sätze ein vollständiges Axiomensystem für die EHG.

Aus demselben Grunde kommt es bei unserem Vollständigkeitsbeweis nicht darauf an, wie die in diesen Sätzen auftretenden Abkürzungen (*agl*, *Ar*, $\underset{g}{+}$, *Kt* usw.) definiert sind; sie müssen lediglich so definiert sein, daß diese Sätze beweisbar sind.[1])

§ 4. Wissenschaftstheoretische Folgerungen aus dem Vollständigkeitsbeweis

1. Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit, Entscheidbarkeit

Aus den Theoremen von der inhaltlichen Widerspruchsfreiheit und von der inhaltlichen Vollständigkeit der EHG ergeben sich noch die folgenden Theoreme.

Theorem von der klassischen Widerspruchsfreiheit der EHG:
Es gibt keinen Ausdruck H derart, daß $\vdash_g H$ *und* $\vdash_g \sim H$.

Theorem von der syntaktischen Widerspruchsfreiheit der EHG:
Es gibt einen Ausdruck H derart, daß nicht $\vdash_g H$.

Theorem von der klassischen Vollständigkeit der EHG:
Für jede Aussage H ist $\vdash_g H$ *oder* $\vdash_g \sim H$.

Theorem von der syntaktischen Vollständigkeit der EHG:
Für jeden Ausdruck H gilt: Wenn nicht $\vdash_g H$, *so ist aus* $ax \cup \{H\}$ *jeder Ausdruck ableitbar.*

Aus dem Tarskischen Entscheidungsverfahren für die ARZ erhalten wir leicht ein Verfahren zur Entscheidung über Allgemeingültigkeit und Beweisbarkeit beliebiger Ausdrücke der EHG.

Auf Grund der Überlegungen in § 3.1 genügt es zunächst, ein solches Entscheidungsverfahren für Aussagen der Punktgeometrie anzugeben. Ein Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültigkeit solcher Aussagen ergibt sich dann schon aus Theorem 1′ S. 156. Soll nämlich über die Allgemeingültigkeit einer Aussage *H* der Punktgeometrie entschieden werden, so braucht man nach diesem Theorem nur zu entscheiden, ob *Rdz*(*H*) in der ARZ allgemeingültig ist, was nach dem Tarskischen Verfahren prinzipiell möglich ist. (Die wirkliche Durchführung des Entscheidungsverfahrens für konkrete Ausdrücke ist im allgemeinen allerdings

[1]) Wenn man auf unsere Definitionen verzichtet und die in diesen Sätzen auftretenden Abkürzungen einmal als zusätzliche Grundzeichen (Konstanten) eines neuen Formalismus auffaßt, so kann man aus den Sätzen 1. bis 40. als Axiomen immer noch das Vollständigkeitstheorem für die Ausdrücke des alten Formalismus nach unserem Verfahren beweisen.

ziemlich langwierig.) Wegen der inhaltlichen Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der EHG wird damit gleichzeitig entschieden, ob H beweisbar ist. Ist das der Fall, so ist auch $Rdz(H)$ beweisbar, und die Umformungen des TARSKIschen Verfahrens liefern sogar einen effektiven Beweis für $Rdz(H)$ in der ARZ. Der Beweis von Theorem 2′ liefert daraus einen effektiven Beweis für $Rdg(Rdz(H))$ in der EHG und der von Theorem 3′ einen effektiven Beweis für H. Für jede beweisbare Aussage der Punktgeometrie und damit (nach den Überlegungen von § 3.1) auch für jeden beweisbaren Ausdruck der EHG läßt sich also ein Beweis effektiv angeben. Wenn man einen Satz der EHG mit irgendwelchen, eventuell der Theorie fremden Hilfsmitteln bewiesen oder auch sonst irgendwie die Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks H (über dem KLEINschen Kugelmodell $\mathfrak{K}_R$) festgestellt hat, so kann man demnach prinzipiell auch einen „reinen", innerhalb der Theorie (gemäß der Definition der Beweisbarkeit) verlaufenden Beweis für H angeben.

Bei der Anwendung des hier skizzierten Entscheidungsverfahrens auf einen Ausdruck der EHG treten gewisse gar nicht zur EHG gehörende Ausdrücke auf, nämlich Ausdrücke der ARZ. Wenn man diesen Umweg vermeiden will, kann man mit Hilfe des Theorems 2′ das ganze TARSKIsche Entscheidungsverfahren für die ARZ auf die Ausdrücke der Form $Rdg(\mathfrak{H})$ (wobei $\mathfrak{H}$ Ausdruck der ARZ ist) übertragen und erhält dann für diese Ausdrücke und damit für die gesamte EHG ein „innergeometrisches" Entscheidungsverfahren, bei dessen Anwendung nur Ausdrücke der EHG auftreten.

2. Modelle der EHG

Bisher haben wir als Modell der EHG fast ausschließlich das KLEINsche Kugelmodell $\mathfrak{K}_R$ über dem angeordneten Körper R der reellen Zahlen behandelt. Wir kehren nun zur Betrachtung beliebiger Modelle zurück.

Nach dem aus der mathematischen Logik bekannten Theorem von LÖWENHEIM und SKOLEM und seiner Umkehrung[1]) ergibt sich, daß die EHG als elementare Theorie nicht kategorisch ist, d. h. verschiedene zueinander nicht isomorphe Modelle besitzt.

Die *Isomorphie* von Geometrien erklären wir dabei wie üblich. Geometrien $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ sind also dann und nur dann isomorph, wenn es eineindeutige Abbildungen von der Menge der Punkte von $\mathfrak{G}_1$ auf die Menge der Punkte von $\mathfrak{G}_2$, von der Menge der Geraden von $\mathfrak{G}_1$ auf die Menge der Geraden von $\mathfrak{G}_2$ und von der Menge der Ebenen von $\mathfrak{G}_1$ auf die Menge der Ebenen von $\mathfrak{G}_2$ gibt derart, daß die beiden Inzidenzen, die Zwischenbeziehung und die beiden Kongruenzen von $\mathfrak{G}_1$ auf irgendwelche Elemente genau dann zutreffen, wenn die entsprechenden Relationen von

[1]) Siehe etwa SCHRÖTER [12] S. 60f. Nach diesen Theoremen besitzt jede elementare Theorie mit einer Sorte von (abzählbar vielen) Variablen, die überhaupt ein unendliches Modell besitzt, sogar zu jeder unendlichen Mächtigkeit ein Modell dieser Mächtigkeit. Daraus ergibt sich zunächst die Existenz nicht isomorpher Modelle der Punktgeometrie, die sich dann zu nicht isomorphen Modellen der EHG erweitern lassen.

$\mathfrak{G}_2$ auf deren Bilder zutreffen. Ist ein Ausdruck H über einer Geometrie $\mathfrak{G}$ allgemeingültig, so ist er natürlich auch über jeder zu $\mathfrak{G}$ isomorphen Geometrie allgemeingültig (wovon man sich an Hand der Definition der Allgemeingültigkeit überzeugen kann). Insbesondere ist jede zu einem Modell der EHG isomorphe Geometrie selbst ein Modell der EHG.

Im Modell $\mathfrak{K}_R$ hatten wir die beiden Kongruenzbeziehungen mit Hilfe der hyperbolischen Bewegungen erklärt. Wir können sie aber auch leicht direkt durch die Koordinaten der eingehenden Punkte ausdrücken. Auf Grund des Satzes S. 159 über die Charakterisierung der Abstandsgleichheit ist nämlich

$\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ streckenkongruent $\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'$ genau dann, wenn

$$\frac{(1-\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2}{(1-\mathfrak{x}^2)(1-\mathfrak{y}^2)} = \frac{(1-\mathfrak{x}'\mathfrak{y}')^2}{(1-\mathfrak{x}'^2)(1-\mathfrak{y}'^2)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}' \neq \mathfrak{y}'. \tag{*}$$

Die Winkelkongruenz in $\mathfrak{K}_R$ kann dann nach Maßgabe von Satz 9. S. 155 durch die übrigen in $\mathfrak{K}_R$ eingeführten Relationen ausgedrückt werden. Man kann auch das folgende Kriterium für die Winkelkongruenz ausrechnen (was hier nicht ausgeführt werden soll):

$\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1$ winkelkongruent $\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2$ genau dann, wenn

$\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}_2 \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}_2$ linear unabhängig und

$$\frac{c_1(\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1) + (\mathfrak{u}_1\mathfrak{y}_1)(\mathfrak{v}_1\mathfrak{y}_1)}{\sqrt{(c_1\mathfrak{u}_1^2 + (\mathfrak{u}_1\mathfrak{y}_1)^2)(c_1\mathfrak{v}_1^2 + (\mathfrak{v}_1\mathfrak{y}_1)^2)}} = \frac{c_2(\mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_2) + (\mathfrak{u}_2\mathfrak{y}_2)(\mathfrak{v}_2\mathfrak{y}_2)}{\sqrt{(c_2\mathfrak{u}_2^2 + (\mathfrak{u}_2\mathfrak{y}_2)^2)(c_2\mathfrak{v}_2^2 + (\mathfrak{v}_2\mathfrak{y}_2)^2)}}\ ^{1}), \tag{**}$$

wobei $\mathfrak{o}$ den Nullvektor des Vektorraumes R^3 bedeutet und zur Abkürzung gesetzt ist: $\mathfrak{u}_\nu = \mathfrak{x}_\nu - \mathfrak{y}_\nu$, $\mathfrak{v}_\nu = \mathfrak{z}_\nu - \mathfrak{y}_\nu$, $c_\nu = 1 - \mathfrak{y}_\nu^2$ $(\nu = 1, 2)$.

Nun erklären wir die Kleinsche *Kugelgeometrie* $\mathfrak{K}_K$ über einem beliebigen angeordneten Körper K mit Hilfe von K genauso, wie wir $\mathfrak{K}_R$ mit Hilfe von R erklärt haben; bei der Definition von Strecken- und Winkelkongruenz verwenden wir dabei etwa die Bedingungen (*) und (**).[2])

In Analogie zur ARZ gilt nun das folgende Theorem.

Theorem: *Eine beliebige Geometrie* $\mathfrak{G}$ *ist dann und nur dann Modell der* EHG, *wenn sie zu einer* Kleinschen *Kugelgeometrie* $\mathfrak{K}_K$ *über einem reell-abgeschlossenen Körper* K *isomorph ist.*

Der Beweisgang hierfür soll jetzt skizziert werden.

Sei zunächst K ein reell-abgeschlossener Körper. Um nachzuweisen, daß jede zu $\mathfrak{K}_K$ isomorphe Geometrie ein Modell der EHG ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{K}_K$ selbst ein solches Modell ist, d. h., daß die Axiome der EHG über $\mathfrak{K}_K$ allgemeingültig sind.

---

[1]) Die Seiten dieser Gleichung bedeuten die Kosinus der durch $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ bzw. $\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{z}_2$ bestimmten (hyperbolisch gemessenen) Winkel.

[2]) Es genügt für das Folgende, wenn wir uns auf solche angeordneten Körper K beschränken, in denen die in (**) auftretenden Wurzeln existieren. (Andernfalls wären diese Wurzeln in einem passenden Erweiterungskörper von K zu nehmen, etwa der reell-abgeschlossenen Hülle von K.)

Der Nachweis dafür, daß die Axiome der Axiomgruppen I. bis IV. über $\mathfrak{K}_K$ allgemeingültig sind, bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten und soll hier übergangen werden.[1])

Der Nachweis für die Allgemeingültigkeit der Stetigkeitsaxiome (Gruppe V.) ist schwieriger; mittels einiger Hilfskonstruktionen, die denen des Vollständigkeitsbeweises ähneln, läßt sich diese Allgemeingültigkeit auf die Allgemeingültigkeit der Stetigkeitsaxiome der ARZ über K zurückführen. Das wurde in [13] S. 163f. für die euklidische Geometrie ausgeführt. Der dort angegebene Beweis läßt sich ohne weiteres auf die EHG übertragen, so daß wir auch darauf hier nicht einzugehen brauchen.[2])

Damit wäre gezeigt, daß jede zu einer Kleinschen Kugelgeometrie $\mathfrak{K}_K$ über einem reell-abgeschlossenen Körper K isomorphe Geometrie $\mathfrak{G}$ ein Modell der EHG ist.

Sei nun umgekehrt $\mathfrak{G}$ ein Modell der EHG. Durch die beim Aufbau der EHG eingeführten Definitionen werden in $\mathfrak{G}$ entsprechende Relationen erklärt, die wir mit denselben Namen wie dort bezeichnen wollen. In $\mathfrak{G}$ gelten alle Sätze, die den Sätzen 1. bis 40. in § 3 (das waren strenggenommen beweisbare Ausdrücke) entsprechen. Damit können wir in $\mathfrak{G}$ folgende Konstruktion ausführen. Wir wählen (nach Satz 40.) Geraden o und e, die ein Zahlenbüschel bestimmen. Nach den Sätzen 14. bis 33. bilden die Geraden dieses Zahlenbüschels — zusammen mit o, e, der geometrischen Addition, der geometrischen Multiplikation, der geometrischen Inversenbildung und der geometrischen Positivitätsrelation — ein Modell der ARZ, also einen reell-abgeschlossenen Körper K. Wir können nun zeigen, daß $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{K}_K$ isomorph ist.

Wir wählen nämlich (nach Satz 39.) Punkte O, O_1, O_2, O_3 von $\mathfrak{G}$, die zusammen ein Koordinatentetraeder bilden, und ordnen jedem Punkt von $\mathfrak{G}$ als Bild bei dem Isomorphismus das Tripel seiner Koordinatengeraden in bezug auf o, e, O, O_1, O_2, O_3 (das ist ja ein Punkt von $\mathfrak{K}_K$) zu. Dadurch wird (nach den Sätzen 34. bis 38. und 13.) eine eineindeutige Abbildung von der Menge der Punkte von $\mathfrak{G}$ auf die Menge der Punkte von $\mathfrak{K}_K$ hergestellt, die die Streckenkongruenz erhält. Nach den Sätzen 9. bis 12. (die in $\mathfrak{G}$ und in $\mathfrak{K}_K$ gelten) bleiben bei dieser Abbildung auch die Geradenbeziehung, die Ebenenbeziehung, die Zwischenbeziehung und die Winkelkongruenz

---

[1]) Es zeigt sich, daß diese Axiome schon dann über $\mathfrak{K}_K$ allgemeingültig sind, wenn K ein angeordneter Körper ist, in dem das Ausziehen der Quadratwurzel aus positiven Elementen unbeschränkt ausführbar ist.

[2]) Man kann die dortigen Ausführungen wörtlich übernehmen, wenn man nur die Bezeichnungen DEG, $\mathfrak{G}_K$ und „Sätze 1. bis 6. und 8. bis 10." der Reihe nach durch EHG, $\mathfrak{K}_K$ und „Sätze 1. bis 9. und 11. bis 13." ersetzt und bei der Erklärung der „erweiterten arithmetischen Reduzierten" zu den Bedingungen aus § 3.2 noch die folgende hinzunimmt:

$$Rdz^*\,(Zw\,A_i A_j A_k) =$$
$$\Big(\bigvee_{\nu=1}^{3} 0 < (x_i^{(\nu)} - x_j^{(\nu)})\,(x_j^{(\nu)} - x_k^{(\nu)})\Big) \wedge \bigwedge_{\mu,\nu=1}^{3} (x_i^{(\mu)} - x_j^{(\mu)})\,(x_j^{(\nu)} - x_k^{(\nu)}) = (x_i^{(\nu)} - x_j^{(\nu)})\,(x_j^{(\mu)} - x_k^{(\mu)}).$$

erhalten. Schließlich kann man auf Grund der Sätze 1. bis 8. eineindeutige Abbildungen von der Menge der Geraden bzw. der Ebenen von $\mathfrak{G}$ auf die Menge der Geraden bzw. der Ebenen von $\mathfrak{K}_K$ konstruieren, welche die Inzidenzbeziehungen erhalten.

Damit ist das Theorem bewiesen.

Auch aus diesem Theorem, das uns einen gewissen Überblick über die Modelle der EHG verschafft, kann man die Nicht-Kategorizität der EHG folgern.

Nicht nur die Sätze von $\mathfrak{K}_R$, sondern die Sätze jedes Modells der EHG (d. h. die über einem solchen Modell allgemeingültigen Ausdrücke) lassen sich als die aus dem Axiomensystem ableitbaren Ausdrücke charakterisieren, d. h., es gilt das folgende

Theorem: *Für jedes Modell* $\mathfrak{G}$ *der* EHG *gilt*: *Es ist* $ag_{\mathfrak{G}}H$ *genau dann, wenn* $\vdash_g H$ *ist.*

Sei nämlich $\mathfrak{G}$ ein beliebiges Modell der EHG. Wenn dann $\vdash_g H$ ist, so ist $ag_{\mathfrak{G}}H$ nach dem schon auf S. 140 formulierten Theorem. Die Umkehrung, die „inhaltliche Vollständigkeit" der EHG bei Zugrundelegung des Modells $\mathfrak{G}$, ergibt sich in bekannter Weise aus der eben erwähnten „inhaltlichen Widerspruchsfreiheit" und der klassischen Vollständigkeit der EHG.

Aus diesem Theorem erhält man unmittelbar das folgende

Theorem: *Für Modelle* $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ *der* EHG *gilt stets*: *Es ist* $ag_{\mathfrak{G}_1}H$ *genau dann, wenn* $ag_{\mathfrak{G}_2}H$ *ist.*

Trotz der Nicht-Kategorizität sind die Modelle der EHG also „elementargeometrisch ununterscheidbar", d. h., sie unterscheiden sich nicht etwa dadurch, daß ein Satz (der elementaren hyperbolischen Geometrie des Raumes) in einem Modell gilt, während er in einem anderen nicht gilt.

§ 5. Beweis der noch fehlenden Sätze aus der elementaren hyperbolischen Geometrie

In diesem Paragraphen wollen wir die Beweise für die früher benutzten Sätze 27. (S. 166) und 35. bis 37. (S. 172 f.) nachtragen. Wie schon in § 1.4 gesagt, führen wir diese Beweise nur inhaltlich, aber so, daß sie sich ohne weiteres in den Formalismus der EHG übertragen lassen.

In dem folgenden Satz wollen wir erst noch die auf S. 163 eingeführte geometrische Summe auf andere Art charakterisieren, was für die weiteren Überlegungen nützlich ist.

Satz: $abSu_{oe}c \leftrightarrow \exists s(Ar_{oe}abcs \wedge aSp_s b \wedge oSp_s c)$.

(Büschelgeraden a und b ergeben genau dann als geometrische Summe c, wenn durch Spiegelung an einer gewissen Büschelgeraden s die Gerade a in b und die Nullgerade in c übergeht. [Durch a und b ist s übrigens eindeutig festgelegt.])

Zum Beweis setzen wir bereits die bei Hilbert [7] bewiesenen Sätze 14. bis 26. (s. S. 166) und einfache Folgerungen aus ihnen voraus. Zunächst gilt der

Hilfssatz: $a\,a\,Su_{oe}\,c \longleftrightarrow Ar_{oe}\,a\,c \wedge o\,Sp_a\,c$.
(Eine Büschelgerade a ergibt zu sich selbst addiert als geometrische Summe c genau dann, wenn die Nullgerade und c spiegelbildlich zu a liegen.)
Ist nämlich $a\,a\,Su_{oe}\,c$ und verwenden wir in der Konstruktion der geometrischen Summe wieder die Bezeichnungen von S. 161 (vgl. auch Abb. 9), so fallen die Punkte A und B zusammen, und es ist $C = A = B$. Damit liegen E und C spiegelbildlich zu a. Durch Spiegelung an a geht also o in eine Büschelgerade über, die durch C geht, d. h. in c. Sind umgekehrt a und c Geraden des durch o und e bestimmten Zahlenbüschels und liegen o und c spiegelbildlich zu a, so braucht man nur den Punkt E auf o wie auf S. 161. zu konstruieren und sein Spiegelbild an a, das dann auf c liegt, mit $C = A = B$ zu bezeichnen, um die in der Definition von $a\,a\,Su_{oe}\,c$ beschriebene Konfiguration zu erhalten.

Für das Folgende sei h (nach Satz 19.) eine Büschelgerade mit $h \cdot (e + e) = e$ (diese Gerade entspricht der Zahl $\frac{1}{2}$).

Sei nun $a\,b\,Su_{oe}\,c$. Wir setzen $a' = a \cdot h$, $b' = b \cdot h$, $c' = c \cdot h$. Nach den Distributivgesetzen ist dann $a' + b' = c'$ und damit $a'\,b'\,Su_{oe}\,c'$, nach Wahl von h außerdem $a'\,a'\,Su_{oe}\,a$, $b'\,b'\,Su_{oe}\,b$, $c'\,c'\,Su_{oe}\,c$ und nach dem Hilfssatz somit $o\,Sp_{a'}\,a$, $o\,Sp_{b'}\,b$, $o\,Sp_{c'}\,c$. Seien e', E, A, B entsprechend der Definition von $a'\,b'\,Su_{oe}\,c'$ gewählt (in den Bezeichnungen von S. 161. sind also nur a, b, c durch a', b', c' zu ersetzen). Da o und a spiegelbildlich zu a' liegen, liegt das Spiegelbild A des Punktes E (auf o) an a' auf a. Ebenso liegt B auf b. Da außerdem A und B spiegelbildlich zu c' liegen (s. S. 163) und die Geraden a, b, c' ein Ende gemeinsam haben, liegen sogar a und b spiegelbildlich zu c'. Damit genügt c' der Bedingung auf der rechten Seite der in unserem Satz behaupteten Äquivalenz.

Gelte nun umgekehrt diese Bedingung, und sei s dementsprechend gewählt, d. h., es sei $Ar_{oe}\,a\,b\,c\,s$, $a\,Sp_s\,b$, $o\,Sp_s\,c$. Sei weiter a^* die geometrische Differenz von c und b, also $a^*\,b\,Su_{oe}\,c$. Nach dem schon bewiesenen Teil unseres Satzes gibt es dann eine Gerade s^* mit $Ar_{oe}\,a^*\,b\,c\,s^*$, $a^*\,Sp_{s^*}\,b$, $o\,Sp_{s^*}\,c$. Aus $o\,Sp_s\,c$ ergibt sich nach unserem Hilfssatz $s + s = c$ und damit $s = c \cdot h$. Aus $o\,Sp_{s^*}\,c$ ergibt sich ebenso $s^* = c \cdot h$. Somit ist $s = s^*$ und damit $a^*\,Sp_s\,b$. Da das Spiegelbild von b an s eindeutig bestimmt ist, ist auch $a^* = a$ und damit $a\,b\,Su_{oe}\,c$.

Damit ist der obige Satz bewiesen.

Zum Beweis von Satz 27. (S. 166) seien $H_1(a)$, $H_2(a)$ beliebige Ausdrücke (in denen a^* und b nicht vorkommen). Da durch diese Ausdrücke gewisse Eigenschaften für Geraden festgelegt werden, wollen wir statt $H_1(a)$ bzw. $H_2(a)$ auch sagen, a habe die Eigenschaft H_1 bzw. H_2. Sei nun die Voraussetzung des Satzes erfüllt; seien also o und e Geraden, die ein Zahlenbüschel bestimmen, und gelte für jede Gerade a des Zahlenbüschels $H_1(a)$ oder $H_2(a)$, weiter gebe es eine Büschelgerade mit der Eigenschaft H_1 und eine solche mit der Eigenschaft H_2, und schließlich sei für Büschelgeraden a, b mit $H_1(a)$ und $H_2(b)$ stets a geometrisch kleiner als b. Wir haben zu zeigen, daß es dann eine Büschelgerade a^* gibt, die die Klasse der Büschelgeraden mit H_1 von der Klasse der Büschelgeraden mit H_2 trennt in dem Sinne, daß jede Büschelgerade mit H_1 kleiner-gleich a^* und jede Büschelgerade mit H_2 größer-gleich a^* ist.

Zu diesem Zwecke wählen wir Büschelgeraden a', b' mit $H_1(a')$ und $H_2(b')$ sowie einen beliebigen Punkt A' auf a' und einen beliebigen Punkt B' auf b' (vgl. Abb. 13). Um Satz 27. auf ein Stetigkeitsaxiom für die Punkte der Geraden durch A' und B' zurückzuführen, wählen wir noch einen Punkt A_0 mit $ZwB'A'A_0$ und bilden die folgenden Ausdrücke:

$$H_1'(A) \underset{\text{Df}}{=} A \underset{A_0}{\simeq} A' \wedge \exists a\big(Ar_{oe}\, a \wedge Inz\, A\, a \wedge H_1(a)\big)$$

(A liegt auf dem Halbstrahl von A_0 durch A', und es gibt eine durch A gehende Büschelgerade mit der Eigenschaft H_1 [d. h., die durch A gehende Büschelgerade hat die Eigenschaft H_1, da es genau eine Büschelgerade durch A gibt]),

$$H_2'(B) \underset{\text{Df}}{=} B \underset{A_0}{\simeq} A' \wedge \exists b\big(Ar_{oe}\, b \wedge Inz\, B\, b \wedge H_2(b)\big)$$

(B liegt auf dem Halbstrahl von A_0 durch A', und die durch B gehende Büschelgerade hat die Eigenschaft H_2).

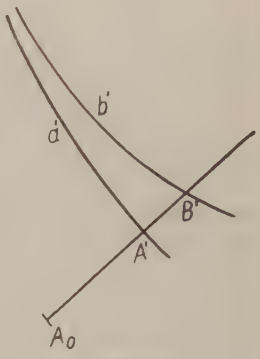


Abb. 13

Dann ist insbesondere $H_1'(A')$ und $H_2'(B')$. Für Punkte A und B auf dem Halbstrahl von A_0 durch A' besteht nun die Zwischenbeziehung $ZwA_0\,A\,B$ genau dann, wenn für die durch sie gehenden Büschelgeraden a und b die Beziehung $a < b$ besteht, d. h., es gilt das

$$\text{Lemma: } A \underset{A_0}{\simeq} A' \wedge B \underset{A_0}{\simeq} A' \wedge Ar_{oe}\, a\, b \wedge Inz\, A\, a \wedge Inz\, B\, b \rightarrow (ZwA_0\, A\, B \leftrightarrow a < b).$$

(Auf den etwas mühseligen aber keineswegs schwierigen Beweis für dieses anschaulich einleuchtende Lemma wollen wir hier verzichten.) Daraus erhält man

$$\forall A\, \forall B(H_1'(A) \wedge H_2'(B) \rightarrow ZwA_0AB), \tag{1}$$

d. h., die Voraussetzung des Stetigkeitsaxioms für die Ausdrücke $H_1'(A)$ und $H_2'(B)$ ist erfüllt. Sei entsprechend der Behauptung dieses Stetigkeitsaxioms A^* ein Punkt mit

$$\forall A\, \forall B(A \neq A^* \wedge H_1'(A) \wedge B \neq A^* \wedge H_2'(B) \rightarrow ZwAA^*B). \tag{2}$$

Wegen $H_1'(A')$ und $H_2'(B')$ ist dann $A^* = A'$ oder $A^* = B'$ oder $ZwA'A^*B'$, damit liegt A^* auf jeden Fall auf dem Halbstrahl von A_0 durch A'. Aus (1) und (2) erhält man (wie im Beweis auf S. 144f.)

$$\forall A(A \neq A^* \wedge H_1'(A) \rightarrow ZwA_0AA^*), \tag{3}$$

$$\forall B(B \neq A^* \wedge H_2'(B) \rightarrow ZwA_0A^*B). \tag{4}$$

Wie man leicht sieht, trifft jede Büschelgerade zwischen a' und b' den Halbstrahl von A_0 durch A', d. h.

$$\forall a\big(Ar_{oe}\, a \wedge a' \leqq a \leqq b' \rightarrow \exists A\,(Inz\, A\, a \wedge A \underset{A_0}{\simeq} A')\big). \tag{5}$$

Sei nun a^* die Büschelgerade durch A^*.

Ist jetzt a eine Büschelgerade mit $H_1(a)$ und $a' \leqq a$, so ist $a < b'$ nach Voraussetzung, also, wenn man A gemäß (5) wählt, $H_1'(A)$ und nach (3) somit $A = A^*$ oder ZwA_0AA^*, woraus sich nach dem Lemma $a \leqq a^*$ ergibt. Insbesondere ist $a' \leqq a^*$. Ist also $a < a'$, so ist erst recht $a \leqq a^*$. Damit ist $a \leqq a^*$ für jede Büschelgerade a mit $H_1(a)$. Ebenso ergibt sich $a^* \leqq a$ für jede Büschelgerade a mit $H_2(a)$ (zunächst für jede mit $a \leqq b'$, dann für die übrigen). Also leistet a^* das in der Behauptung von Satz 27. Verlangte, womit dieser Satz bewiesen ist.

Zum Beweis der Sätze 35. bis 37. (S. 172f.) wollen wir einige Vorüberlegungen anstellen.

Eine Satz 35. entsprechende Charakterisierung der Abstandsgleichheit in der euklidischen Geometrie[1]) kann man erhalten, indem man den Abstand zweier Punkte durch deren Koordinaten ausdrückt, was im wesentlichen auf einen Beweis für den Satz des Pythagoras hinausläuft. Dabei ist der Abstand der Punkte natürlich im Rahmen des zugrunde liegenden Formalismus einzuführen; man kann ihn bei Auszeichnung einer Zahlengeraden etwa erklären als den Punkt der Zahlengeraden, den man erhält, wenn man die Verbindungsstrecke der vorgegebenen Punkte auf der Zahlengeraden vom Nullpunkt aus in positiver Richtung abträgt.

Ganz entsprechend wollen wir in der hyperbolischen Geometrie vorgehen. Wir haben also den Abstand oder allgemeiner eine geeignete Funktion des Abstandes von Punkten in der EHG einzuführen und durch die Koordinaten dieser Punkte auszudrücken.

Um eine solche Funktion zu finden, betrachten wir noch einmal das auf S. 167ff. verwendete Zahlenbüschel im Kleinschen Kugelmodell $\mathfrak{K}_R$ und benutzen dieselben Bezeichnungen wie dort.[2]) Sei $\mathfrak{x} = [x_1, 0, 0]$ ein beliebiger Modellpunkt auf der x_1-Achse mit nicht-negativer Abszisse (so daß also $0 \leqq x_1 < 1$). Sein hyperbolischer Abstand vom Nullpunkt $\mathfrak{o}$ wird nach Formel (3) S. 159 ausgedrückt durch

$$\mathfrak{Cof}\,\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{x}} = \frac{1 - \mathfrak{o}\mathfrak{x}}{\sqrt{(1-\mathfrak{o}^2)(1-\mathfrak{x}^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}}.$$

Also ist

$$x_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\,\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{x}}}} = \mathfrak{Tg}\,\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{x}},$$

wobei $\mathfrak{Tg}$ den Tangens hyperbolicus bedeutet. Der Zahl x_1 entspricht bei dem auf S. 167ff. betrachteten Isomorphismus φ die Gerade unseres Zahlenbüschels, die durch den Punkt $\mathfrak{x}$ geht. Somit läßt sich der Tangens hyperbolicus des Abstandes von Punkten A, B bzw. die (beim betrachteten Isomorphismus) entsprechende Gerade des Zahlenbüschels besonders einfach in der EHG einführen[3]); diese Ge-

[1]) Siehe etwa [13] S. 149, Satz 25.

[2]) Die folgenden Überlegungen dienen ebenso wie die Betrachtungen auf S. 167ff. lediglich dazu, zweckmäßige Definitionen zu finden, und sind für die an diese Definitionen angeknüpften Untersuchungen, insbesondere für den Nachweis der Vollständigkeit der EHG, nicht erforderlich.

[3]) Es sei ohne Beweis mitgeteilt, daß der Abstand selbst (d. h. die Länge von Strecken) — in diesem Sinne als Element des Zahlenbüschels aufgefaßt — nicht in der EHG definierbar ist.

rade ist die Büschelgerade durch den Punkt, den man erhält, wenn man die „Strecke" AB (wobei wir jetzt zulassen, daß A und B zusammenfallen) auf e' von E aus in positiver Richtung (d. h. nach dem e und e' gemeinsamen Ende hin) abträgt.

Unabhängig von einem speziellen Modell definieren wir dementsprechend folgendes.

A, B ergeben in bezug auf o, e als (hyperbolischen) Abstandstangens a:

$$AB\,th_{oe}\,a \underset{\text{Df}}{=} Ar_{oe}\,a \wedge o \leqq a \wedge \exists e' \exists E \exists A' (e o Le f e' E \wedge Inz A' e' \wedge E A' agl AB \wedge Inz A' a).$$

Der Abstandstangens von A und B in bezug auf o, e:

$$th_{oe}(A, B) \underset{\text{Df}}{=} \iota a (AB\,th_{oe}\,a \vee (\sim Ar_{oe} \wedge a = o)).$$

Wie schon bei den geometrischen Rechenoperationen wollen wir auf die Angabe der Bezugsgeraden o und e meist verzichten und folgende kürzere Schreibweise einführen.

$$th(A, B) \underset{\text{Df}}{=} th_{oe}(A, B).$$

(Das ist jedoch ein Term, der a_0 und a_1 als freie Variablen enthält.)

Im Modell $\mathfrak{K}_R$ gilt für beliebige Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ nach Formel (3) S. 159 (wegen $1 - \mathfrak{Tg}^2\,x = \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\,x}$):

$$1 - \mathfrak{Tg}^2\,\overline{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}} = \frac{(1 - \mathfrak{x}^2)\,(1 - \mathfrak{y}^2)}{(1 - \mathfrak{x}\,\mathfrak{y})^2}.$$

In dem folgenden Satz wollen wir dementsprechend $e - th^2(A, B)$[1]) durch die Koordinaten von A und B unabhängig von einem speziellen Modell ausdrücken.

Satz: $$AKg^{oe}_{OO_1O_2O_3}a'a''a''' \wedge BKg^{oe}_{OO_1O_2O_3}b'b''b''' \rightarrow e - th^2(A, B) = \frac{(e - (a'^2 + a''^2 + a'''^2))\,(e - (b'^2 + b''^2 + b'''^2))}{(e - (a'b' + a''b'' + a'''b'''))^2}.$$

Zum Beweis von Satz 35. genügt es nun, diesen Satz zu beweisen. Auf Grund der Definition von th besteht nämlich, falls o und e ein Zahlenbüschel bestimmen, die Abstandsgleichheit zwischen Punkten A_i, A_j, A_k, A_l genau dann, wenn $th(A_i, A_j) = th(A_k, A_l)$ ist. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn $e - th^2(A_i, A_j) = e - th^2(A_k, A_l)$ ist (da stets $o \leqq th(A, B)$ ist), das heißt aber nach dem letzten Satz, daß für die Koordinaten von A_i, A_j, A_k, A_l die in Satz 35. angegebene Bedingung gilt.

Aus den vorhergehenden Überlegungen erhalten wir sofort, daß der eben angegebene Satz über $\mathfrak{K}_R$ allgemeingültig ist. Um ihn allein aus den Axiomen der EHG zu erhalten, wollen wir im folgenden einige Sätze der hyperbolischen Trigonometrie mit Hilfe des Abstandstangens in die EHG übertragen und mit unseren Hilfsmitteln neu beweisen. Dabei werden sich ziemlich einfach auch die noch zu beweisenden Sätze 36. und 37. ergeben.

Zunächst wollen wir zwei Hilfssätze über den Abstandstangens beweisen.

[1]) $th^2(A, B)$ bedeutet natürlich $(th(A, B))^2$ (das geometrische Quadrat von $th(A, B)$).

Hilfssatz 1: $Ar_{oe} \wedge Endlpq \wedge qlLefgL \wedge gpSchnP$

$$\wedge g_1 \perp l \wedge g_1 lSchnL_1 \wedge g_1 pSchnP_1 \wedge g_1 qSchnQ_1$$

$$\rightarrow \frac{th(L_1, P_1)}{th(L_1, Q_1)} = th(L, P).$$

(Seien [vgl. Abb. 14, linke Seite] l, p, q Geraden mit gemeinsamem Ende, sei g das Lot von einem [dem nicht auf l liegenden] Ende von q auf l und L der Fußpunkt dieses Lots, und sei g_1 ein beliebiges Lot auf l, welches p und q schneidet. Weiter

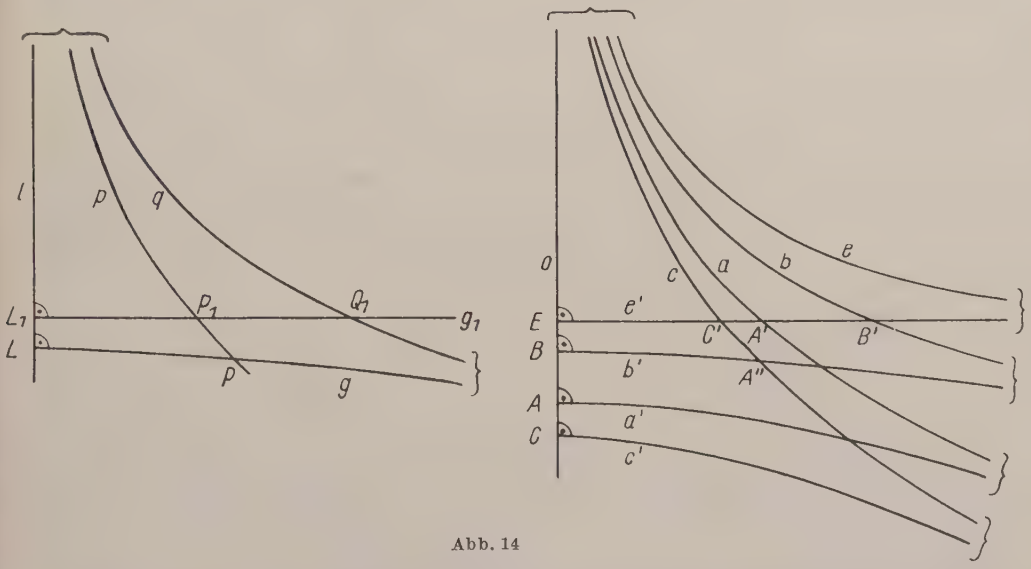


Abb. 14

mögen l, p, q die Gerade g_1 der Reihe nach in L_1, P_1, Q_1 schneiden, und p möge g in P schneiden. Bestimmen dann noch o und e ein Zahlenbüschel, so gilt für den [darauf bezogenen] Abstandstangens die Beziehung

$$\frac{th(L_1, P_1)}{th(L_1, Q_1)} = th(L, P).$$

Übrigens sieht man aus dieser Beziehung, da darin g_1 ein beliebiges Lot auf l sein kann, welches p und q schneidet, daß das Verhältnis der Abstandstangenten der Punkte, in denen solche Lote von l und p einerseits und von l und q andererseits geschnitten werden, eine allein durch l, p und q bestimmte Konstante ist. Offenbar kann man diese Konstante selbst, also $th(L, P)$, als Grenzwert eines solchen Verhältnisses auffassen, da $th(L, Q)$ gegen e strebt, wenn sich Q unbegrenzt von L entfernt.)

Gelte die Voraussetzung. Wir konstruieren e' und E in dem durch o und e bestimmten Zahlenbüschel wie üblich (S. 161) und setzen $c = th(L_1, P_1)$. $b = th(L_1, Q_1)$.

Da q sicher von l verschieden ist, ist $b \neq o$. Ist nun $p = l$, so ist $th(L_1, P_1) = th(L, P) = o$, und die Behauptung ist trivial. Sonst bilden wir den geometrischen Quotienten $a = \frac{c}{b}$ und haben $a = th(L, P)$ nachzuweisen (vgl. Abb. 14). Dann ist zunächst $ab\,Pr_{oe}c$, $c \neq o$ und $a \neq o$. Seien a', b', c' die Lote von den nicht auf o liegenden Enden von a, b bzw. c auf o und A, B, C deren Fußpunkte, A', B', C' die Schnittpunkte von a, b, c mit e'. Nach Wahl von b ist $EB' \underset{s}{\equiv} L_1Q_1$, nach Kongruenzsatz 2 S. 150 also $EB \underset{s}{\equiv} L_1L$. Nach Wahl von c ist außerdem $EC' \underset{s}{\equiv} L_1P_1$, nach Kongruenzsatz 1 S. 150 schneiden sich also c und b' in einem Punkte A'' mit $BA'' \underset{s}{\equiv} LP$. Nach Definition der angegebenen Produktrelation ist $EA \underset{s}{\equiv} BC$ und nach Kongruenzsatz 2 (wobei die Stücke o, B, C, b', c', c, A'' den Stücken o, E, A, e', a', a, A' entsprechen) somit $EA' \underset{s}{\equiv} BA''$. Also ist $EA' \underset{s}{\equiv} LP$ und damit $a = th(L, P)$, wie zu zeigen war.

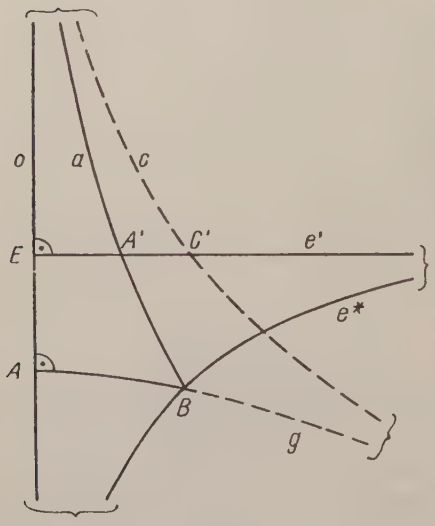


Abb. 15

Hilfssatz 2: $Ar_{oe}a \wedge eoLefe'E \wedge e\,Sp_{e'}\,e^* \wedge ae^*\,Schn\,B \wedge Inz\,Ao \wedge RwEAB \rightarrow th^2(A, B) = a.$

(Sind in dem durch o und e bestimmten Zahlenbüschel e' und E wie üblich konstruiert [S. 161], ist e^* das Spiegelbild von e an e', B ein beliebiger Punkt auf e^*, a die Büschelgerade durch B und A der Fußpunkt des Lots von B auf o, so ist $th^2(A, B) = a$.)

Sei die Voraussetzung erfüllt (vgl. Abb. 15), sei g das Lot von B auf o, c die Verbindungsgerade der durch die Halbstrahlen AE und AB bestimmten Enden, und seien A', C' die Schnittpunkte von a bzw. c mit e'. Nach Hilfssatz 1 ist dann

$$\frac{th(E, A')}{th(E, C')} = th(A, B), \text{ d. h.}$$

$$th(A, B) \cdot th(E, C') = th(E, A').$$

Nach Wahl von A' ist aber $th(E, A') = a$; nach Kongruenzsatz 2 S. 150 (wobei den Stücken o, E, A, e', g, c, C' die Stücke o, A, E, g, e', e^*, B entsprechen) andererseits $EC' \underset{s}{\equiv} AB$ und damit $th(E, C') = th(A, B)$. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Wir kommen nun zu den angekündigten „trigonometrischen" Sätzen.

Satz (1): $Ar_{oe} \wedge AB\,Cp\,CD \rightarrow th^2(A, B) + th^2(C, D) = e.$

(Für komplementäre Strecken ist die Quadratsumme der Abstandstangenten [in bezug auf ein Zahlenbüschel] die Einheitsgerade des Zahlenbüschels.)

Zum Beweis (vgl. Abb. 16) seien AB und CD zueinander komplementäre Strecken und o und e Bestimmungsgeraden eines Zahlenbüschels. Wir setzen $a = th^2(A, B)$, $b = e - a$. Dann ist $a + b = e$, und es genügt, $b = th^2(C, D)$ nachzuweisen. Sei s nach dem Satz S. 178 eine Gerade des Zahlenbüschels, zu der sowohl a und b als auch o und e spiegelbildlich liegen; seien e' und E wie üblich konstruiert (S. 161), und sei e^* das Spiegelbild von e an e'. Da e^* die nicht auf s liegenden Enden der (spiegelbildlich zu s liegenden) Geraden o und e verbindet, steht s senkrecht auf e^* in einem gewissen Punkte S. Nach Konstruktion ist $o < a < e$ und $o < b < e$, daher schneiden a und b die Gerade e^* in gewissen Punkten A^* und B^*. Da a und b spiegelbildlich zu s liegen, liegen auch A^* und B^* spiegelbildlich zu s und zu S. Damit ist $A^*S \, agl \, B^*S$, und a und b bilden mit e^* gleiche (innere) Winkel (das sind nämlich Parallelwinkel zu A^*S und B^*S, falls nicht gerade A^* und B^* mit S zusammenfallen). Die Winkel zwischen a und e^* bei A^* und zwischen b und e^* bei B^*, die die Gerade o enthalten, ergänzen sich also zu 180°.[1]) Seien nun A', B' die Fußpunkte der Lote von A^* bzw. B^* auf o. Diese Lote halbieren die eben erwähnten Winkel, da o die Enden der Schenkel dieser Winkel verbindet. Die (in Abb. 16 markierten) Parallelwinkel zu $A'A^*$ und $B'B^*$ sind also die Hälften jener Winkel und ergänzen sich somit zu einem rechten Winkel. Also sind $A'A^*$ und $B'B^*$ zueinander komplementär. Nach Hilfssatz 2 ist außerdem $th^2(A', A^*) = a$ und $th^2(B', B^*) = b$. Nach Wahl von a ist nun $th^2(A', A^*) = th^2(A, B)$ und damit $A'A^* \underset{s}{\equiv} AB$. Wegen der Komplementarität der entsprechenden Strecken ist auch $B'B^* \underset{s}{\equiv} CD$, also $th(B', B^*) = th(C, D)$ und damit $b = th^2(B', B^*) = th^2(C, D)$, wie zu zeigen war.

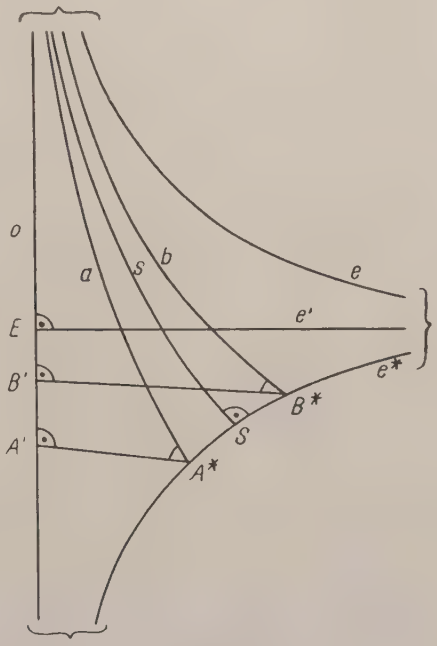


Abb. 16

Satz (2): $Ar_{oe} \wedge EbABCD \wedge RwABC \wedge RwBCD \wedge RwCDA$

$$\rightarrow th(B, A) = th(C, D) \cdot \frac{e}{\sqrt{e - th^2(C, B)}}.$$

[1]) Das läßt sich natürlich auch ohne Benutzung des Winkelmaßes elementar (d. h. in der EHG) ausdrücken.

(Bestimmen o und e ein Zahlenbüschel und sind A, B, C, D die Eckpunkte eines Spitzecks — d. h. eines ebenen Vierecks mit drei rechten Winkeln — mit dem spitzen Winkel[1]) bei A [vgl. Abb. 17], so gilt für die Abstandstangenten der Seiten die Beziehung

$$th(B, A) = th(C, D) \cdot \frac{e}{\sqrt{e - th^2(C, B)}} .$$

Hierbei bedeutet der letzte Faktor im KLEINschen Kugelmodell $\mathfrak{K}_R$ natürlich den Cosinus hyperbolicus des Abstandes von C und B.)

Sei die Voraussetzung erfüllt, und seien a, b, c, d der Reihe nach die Seiten des Spitzecks, d. h. die Geraden durch A und B, durch B und C, durch C und D und durch D und A. Sei weiter f das Lot vom Ende des Halbstrahls von B aus durch A auf c

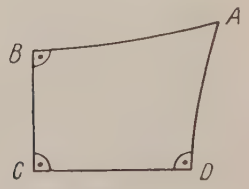


Abb. 17

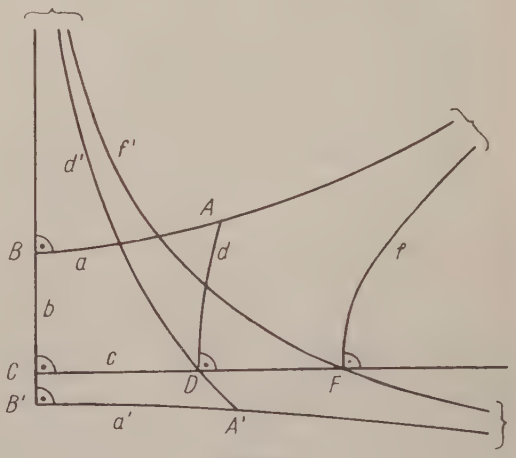


Abb. 18

und F der Fußpunkt dieses Lots (vgl. Abb. 18). Dann sind die Strecken CB und CF komplementär, und nach Satz (1) ist $th(C, F) = \sqrt{e - th^2(C, B)}$.

Also genügt es, die folgende, einfachere Beziehung zu beweisen:

$$\frac{th(C, D)}{th(C, F)} = th(B, A).$$

Diese Behauptung ähnelt dem Hilfssatz 1 S. 183, nur hatten dort die Geraden l, p, q ein Ende gemeinsam (gehörten also, wie man sagt, zu einem „parabolischen Geradenbüschel"), während hier die entsprechenden Geraden b, d, f auf einer weiteren Geraden senkrecht stehen (also zu einem sog. „hyperbolischen Geradenbüschel" gehören).

Seien nun d' und f' die Parallelen durch D bzw. F zu dem von C aus durch B gehenden Halbstrahl, sei a' das Lot von dem nicht auf b liegenden Ende von f' auf

[1]) Es läßt sich beweisen, daß in einem solchen Viereck der vierte Winkel spitz ist. Das wird aber für das Folgende nicht gebraucht. Man kann daher auf diesen Nachweis verzichten und unter einem „Spitzeck mit dem spitzen Winkel bei A" ein ebenes Viereck verstehen, in dem die nicht bei A liegenden Winkel Rechte sind.

b und B' der Fußpunkt dieses Lots. Dann schneiden sich d' und a' in einem gewissen Punkte A', und nach Hilfssatz 1 S. 183 ist

$$\frac{th(C,D)}{th(C,F)} = th(B', A').$$

Also genügt es, (in der in Abb. 18 angedeuteten Konfiguration) $B'A' \underset{s}{\equiv} BA$ nachzuweisen. Damit wäre unsere „trigonometrische Formel" auf eine elementargeometrische Behauptung[1]) zurückgeführt. Zum Beweis derselben wollen wir zwei Lemmata beweisen.

Lemma 1: $C^* \underset{G}{\cong} B \wedge ZwCC^*B^* \wedge B^*C^* \underset{s}{\equiv} BC$
$\wedge\, EbABCA^*D^* \wedge RwA^*B^*C^*$
$\wedge\, RwB^*C^*D^* \wedge RwC^*D^*A^*$
$\rightarrow (RwA^*AB \leftrightarrow RwD^*DC).$

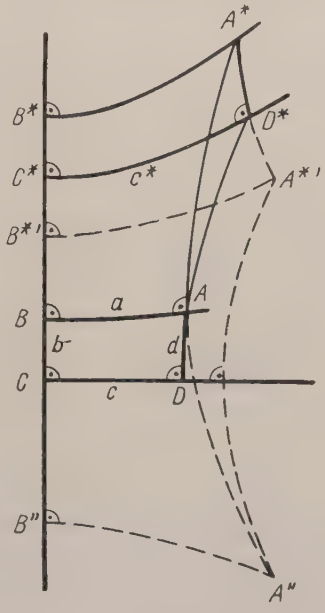


Abb. 19

(Entsteht die Strecke B^*C^* durch eine Translation von BC längs b in der Richtung von C nach B und bilden A^*, B^*, C^*, D^* in der betrachteten Ebene ebenfalls [ebenso wie A, B, C, D] ein Spitzeck mit dem spitzen Winkel bei A^*, so ist A der Fußpunkt des Lots von A^* auf a genau dann, wenn D der Fußpunkt des Lots von D^* auf c ist.)

Gelte noch die hier angegebene Voraussetzung und sei zunächst A Fußpunkt des Lots von A^* auf a, d. h. RwA^*AB (vgl. Abb. 19). Wir spiegeln B^* und A^* an der Geraden c^*, die durch C^* und D^* geht, die Spiegelbilder seien $B^{*\prime}$ und $A^{*\prime}$. Außerdem spiegeln wir B^* und A^* an a, die Spiegelbilder seien B'' und A''. Dann ist D^* der Mittelpunkt der Strecke $A^*A^{*\prime}$ und A der Mittelpunkt der Strecke A^*A''. Weiter liegen die Punkte C, B, C^*, B^*, $B^{*\prime}$, B'' sämtlich auf b, $B^{*\prime}$ ist das Spiegelbild von B^* an C^* und B'' das Spiegelbild von B^* an B. Falls $C^* = B$ ist, fallen die Geraden c^* und a und die Punkte D^* und A zusammen, so daß sich sofort RwD^*DC ergibt. Sonst erhält man auf Grund von Axiom III A 5. aus $B^*B \underset{s}{\equiv} BB''$ und $B^*C^* \underset{s}{\equiv} BC$ leicht $C^*B \underset{s}{\equiv} CB''$, aus $B^{*\prime}C^* \underset{s}{\equiv} B^*C^* \underset{s}{\equiv} BC$ (und $C^*C \underset{s}{\equiv} CC^*$) andererseits $CB^{*\prime} \underset{s}{\equiv} C^*B$ (sowohl in dem in Abb. 19 dargestellten Falle $ZwCBC^*$ als auch in dem anderen möglichen Falle $ZwCC^*B$). Damit ist $CB^{*\prime} \underset{s}{\equiv} CB''$, und da $B^{*\prime}$ und B'' (als Spiegelbilder von B^* an den verschiedenen Punkten C^* und B)

[1]) Diese Behauptung kann man leicht aus einem Spezialfall des Desarguesschen Satzes über perspektiv liegende (hier zum Teil entartete) Dreiecke erhalten. Da mir aber für diesen Satz aus der Literatur kein elementarer Beweis aus unseren Axiomen bekannt ist, gebe ich statt dessen einen direkten Beweis für unsere Behauptung an, der kürzer ist als der Umweg über den Desarguesschen Satz.

voneinander verschieden sind, liegen sie spiegelbildlich zu C und damit zu c. Da die Strecken $B^{*\prime}A^{*\prime}$ und $B^{\prime\prime}A^{\prime\prime}$ nach Konstruktion zu B^*A^* und damit zueinander kongruent sind, liegen auch $A^{*\prime}$ und $A^{\prime\prime}$ spiegelbildlich zu c, d. h., c ist das Mittellot zu $A^{*\prime}$ und $A^{\prime\prime}$. Nach dem aus der absoluten Geometrie bekannten Satz, daß die Verbindungsgerade der Mitten zweier Seiten eines Dreiecks senkrecht auf dem Mittellot der dritten Seite steht (s. z. B. LIEBMANN [8] S. 16), angewandt auf das Dreieck $A^{\prime\prime}A^{*\prime}A^*$, steht die Verbindungsgerade der Punkte D^* und A senkrecht auf c; sie fällt somit mit dem Lot d von A auf c zusammen und geht insbesondere durch D. Damit ist auch hier RwD^*DC, wie behauptet wurde.

Ist nun umgekehrt RwD^*DC, so fällen wir das Lot von A^* auf a und von dessen Fußpunkt A_0 das Lot auf c, sein Fußpunkt sei D_0. Dann sind die Voraussetzungen von Satz (2) für A_0, B, C, D_0 erfüllt, außerdem ist RwA^*A_0B, und nach dem schon bewiesenen Teil unseres Lemmas ist RwD^*D_0C, d. h., auch D_0 ist Fußpunkt des Lots von D^* auf c. Da der Fußpunkt eindeutig bestimmt ist, ist $D_0 = D$, und auf dem Lot liegen sowohl A_0 als auch A. Da der Schnittpunkt zwischen dem Lot und der Geraden a eindeutig bestimmt ist, ist auch $A_0 = A$ und damit RwA^*AB, wie behauptet.

Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2: $ZwB'CC^* \wedge B'^* \underset{C^*}{\cong} C \wedge C^*B'^* \underset{g}{\equiv} CB'$

$\wedge\, EbA'B'CA'^*D^* \wedge RwA'^*B'^*C^* \wedge RwB'^*C^*D^* \wedge A'^*D^* \,||\, B'^*C^*$

$\rightarrow (RwA'^*A'B' \leftrightarrow RwD^*DC)$.

(Entsteht die Strecke $C^*B'^*$ durch eine Translation von CB' längs b in der Richtung von B' nach C und bilden A'^*, B'^*, C^*, D^* in der betrachteten Ebene ebenfalls [ebenso wie A', B', C, D] ein Viereck mit rechten Winkeln bei B'^* und C^*, dessen Seite A'^*D^* zu B'^*C^* parallel ist, so ist A' der Fußpunkt des Lots von A'^* auf a' genau dann, wenn D der Fußpunkt des Lots von D^* auf c ist.)

Zum Beweis (vgl. Abb. 20) setzen wir außer den im Lemma angegebenen Voraussetzungen über die Punkte A' und D nur voraus, daß sie in der betrachteten Ebene zusammen mit B' und C ein Viereck mit rechten Winkeln bei B' und C bilden, und zeigen, daß $A'D$ zu $B'C$ parallel ist, wenn $RwA'^*A'B'$ und RwD^*DC ist. Daraus ergibt sich Lemma 2 unmittelbar; denn ist $A'D$ parallel zu $B'C$ und etwa $RwA'^*A'B'$, so erhält man für den Fußpunkt D_0 des Lots von D^* auf die Gerade c durch C und D, daß $A'D_0$ parallel zu $B'C$ ist, und daraus, daß D_0 (als Schnittpunkt von c und der Parallelen zu $B'C$ durch A') mit D zusammenfällt, also RwD^*DC ist. Ebenso erhält man die Umkehrung.

Sei also noch $RwA'^*A'B'$ und RwD^*DC. Wir spiegeln C^* und D^* an der Verbindungsgeraden c von C und D, die Spiegelbilder seien C' und D'. Außerdem spiegeln wir B'^* und A'^* an der Verbindungsgeraden a' von B' und A', die Spiegelbilder seien B'' und A''. Dann ist D der Mittelpunkt der Strecke D^*D' und A' der Mittelpunkt der Strecke A'^*A''. Weiter liegen die Punkte C, B', C^*, B'^*, C', B''

sämtlich auf einer Geraden b, und die Strecken $B'C$, B'^*C^*, $B''C'$ sind gleich gerichtet (also $B'C \parallel B'^*C^* \parallel B''C'$) und paarweise kongruent. Schließlich bilden A'', B'', C', D' in der betrachteten Ebene ein Viereck mit rechten Winkeln bei B'' und C', in welchem auch die Seiten $A''B''$ und $C'D'$ zu den entsprechenden Seiten des Vierecks $A'^*B'^*C^*D^*$ kongruent sind. Aus Kongruenzsatz 1 S. 150 und der Voraussetzung $A'^*D^* \parallel B'^*C^*$ erhält man dann leicht $A''D' \parallel B''C'$. Damit sind $A''D'$ und A'^*D^* zueinander und zu $B'C$ parallel. Außerdem ist $A'^*D^* \underset{s}{\equiv} A''D'$.

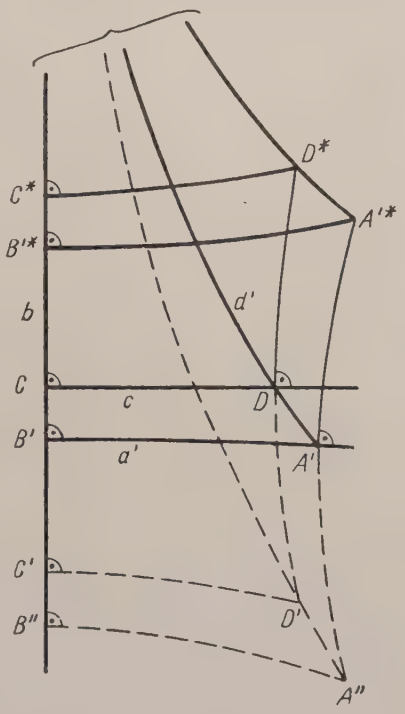


Abb. 20

Um nun die verlangte Parallelität des Halbstrahls $A'D$ zu $B'C$, d. h. zu A'^*D^* und $A''D'$, nachzuweisen, genügt es (da D^*, D, D' auf derselben Seite der Geraden durch A'^*, A', A'' liegen, d. h., daß der Halbstrahl $A'D$ in das von den Halbstrahlen A'^*D^*, $A''D'$ und der Verbindungsstrecke ihrer Ausgangspunkte begrenzte Gebiet hineinläuft) zu zeigen, daß dieser Halbstrahl keinen der beiden Halbstrahlen A'^*D^*, $A''D'$ schneidet.

Dazu benutzen wir aus der absoluten Geometrie den Hjelmslevschen Mittelliniensatz (s. z. B. Liebmann [8] S. 20f. oder Baldus [3] S. 89f.), der gewöhnlich folgendermaßen formuliert wird:

Sei eine eineindeutige Abbildung von (der Menge der Punkte) einer Geraden g_1 auf eine Gerade g_2 gegeben derart, daß der Abstand von Punkten bei dieser Abbildung erhalten bleibt (daß also für die Bilder A_2, B_2 zweier Punkte A_1, B_1 von g_1 stets $A_1B_1 \underset{s}{\equiv} A_2B_2$ ist); dann ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Verbindungsstrecken entsprechender Punkte enthalten in (der Menge der Punkte) einer Geraden.

Wir benötigen jedoch nur die folgende, elementare Formulierung, die sich (wie es im wesentlichen a. a. O. tatsächlich ausgeführt wird) auch elementar beweisen läßt.

$$Gr\,A_1A_2A_3 \wedge Gr\,B_1B_2B_3 \wedge A_1A_2 \underset{s}{\equiv} B_1B_2 \wedge A_1A_3 \underset{s}{\equiv} B_1B_3 \wedge A_2A_3 \underset{s}{\equiv} B_2B_3$$
$$\wedge \bigwedge_{\nu=1}^{3} (Zw\,A_\nu P_\nu B_\nu \wedge A_\nu P_\nu \underset{s}{\equiv} B_\nu P_\nu) \rightarrow Gr\,P_1P_2P_3.$$

(Liegen die Punkte A_1, A_2, A_3 auf einer Geraden, die Punkte B_1, B_2, B_3 ebenfalls auf einer Geraden, sind die Verbindungsstrecken der Punkte A_1, A_2, A_3 den entsprechenden Verbindungsstrecken der Punkte B_1, B_2, B_3 kongruent und sind P_1, P_2, P_3 der Reihe nach die Mittelpunkte der Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, so liegen P_1, P_2, P_3 auf einer Geraden.)

Nehmen wir jetzt an, der Halbstrahl $A'D$ schneide einen der beiden Halbstrahlen A'^*D^*, $A''D'$, etwa A'^*D^* (der andere Fall läßt sich völlig analog behandeln) in einem gewissen Punkte P^*. Sei dann P' ein Punkt auf dem Halbstrahl $A''D'$ derart, daß die Verbindungsstrecken der Punkte A'^*, D^*, P^* den entsprechenden Verbindungsstrecken der Punkte A'', D', P' kongruent sind, und sei P der Mittelpunkt der Strecke P^*P'. Nach dem Hjelmslevschen Mittelliniensatz liegen dann die Punkte A', D, P auf einer gewissen Geraden d'. Diese enthält den Halbstrahl $A'D$ und ist verschieden von der Geraden p durch die Punkte P^*, P, P' (da letztere nicht durch A' geht), schneidet also p in höchstens einem Punkte. Nach Konstruktion haben dagegen die Geraden d' und p die verschiedenen Punkte P^* und P gemein, womit unsere Annahme zum Widerspruch geführt ist.

Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Kehren wir nun zum Beweis von Satz (2) (S. 186f.) zurück und nehmen zunächst an, die Strecke BA sei kleiner als $B'A'$ (d. h. zu einer echten Teilstrecke von $B'A'$ kongruent). Dann errichten wir (vgl. Abb. 21) in der betrachteten Ebene das Lot $\overline{a'}$ in A' auf a' und fällen von einem Ende desselben das Lot a'^* auf b, sein Fußpunkt sei B'^*. Dabei verwenden wir dasjenige Ende von $\overline{a'}$, für das $B'^* \underset{B'}{\cong} C$ ist. Weiter wählen wir Punkte C^*, B^* auf b so, daß B'^*, C^*, B^* durch eine Translation längs b aus B', C, B entstehen (so daß also die Strecken $B'C$ und B'^*C^* zueinander kongruent und gleich gerichtet sind und ebenso die Strecken CB und C^*B^*). Seien a^*, c^* in der betrachteten Ebene die Lote auf b in den Punkten B^* bzw. C^*. Sei f'^* die Gerade, die das a'^* und $\overline{a'}$ gemeinsame Ende mit dem durch den Halbstrahl B'^*C^* bestimmten Ende verbindet. Dann schneiden sich f'^* und c^* in einem gewissen Punkte F^*, und nach Kongruenzsatz 2 S. 150 ist $CF \underset{s}{\equiv} C^*F^*$. Da außerdem $CB \underset{s}{\equiv} C^*B^*$ ist und die Strecken CB und CF komplementär sind, sind auch C^*B^* und C^*F^* komplementär, also ist das Lot f^* in der betrachteten Ebene auf c^* in F^* parallel zu a^*. (Durch die oben erwähnte Translation längs b gehen die Stücke a', c, a, F, f, f' der Reihe nach in a'^*, c^*, a^*, F^*, f^*, f'^* über.) Von dem a^* und f^* gemeinsamen Ende fällen wir nun das Lot $\overline{a}_0$ auf a, sein Fußpunkt sei A_0. Nach Konstruktion ist $B'A'$ komplementär zu $B'B'^*$ und BA_0 komplementär zu BB^*, wegen $B'B'^* \underset{s}{\equiv} BB^*$ ist somit $B'A' \underset{s}{\equiv} BA_0$. Aus der Annahme, daß BA kleiner als $B'A'$ ist, ergibt sich also $ZwBAA_0$. Damit schneidet das Lot $\overline{a}$ in der betrachteten Ebene auf a in A die Gerade a^* in einem gewissen Punkte A^*. Sei d^* das Lot von A^* auf c^* und D^* sein Fußpunkt. Dann ist $ZwC^*D^*F^*$ und nach Lemma 1 außerdem RwD^*DC (d. h., D^* liegt auf d). Sei d'^* die Parallele zu B'^*C^* durch D^*. Wegen $ZwC^*D^*F^*$ schneidet diese die Gerade a'^* in einem gewissen Punkte A'^*, und nach Lemma 2 ist $RwA'^*A'B'$. Das bedeutet aber, daß A'^* auf $\overline{a'}$ liegt, während nach unserer Konstruktion die Geraden a'^* und $\overline{a'}$ parallel sind. Damit ist die Annahme, BA sei kleiner als $B'A'$, zum Widerspruch geführt.

Ganz entsprechend läßt sich die Annahme, daß $B'A'$ kleiner als BA ist, zum Widerspruch führen. (Man braucht dazu nur in der vorhergehenden Überlegung die mit einem Strich versehenen Bezeichnungen [A', a', a'^* usw.] mit den ent-

sprechenden Bezeichnungen ohne Strich und die zugehörigen Konstruktionen, insbesondere die Anwendung der Lemmata 1 und 2, miteinander zu vertauschen. Die „Translation längs b" ist also jetzt so zu wählen, daß das Lot $\bar{a}$ in der betrachteten Ebene auf a in A zu a^* parallel wird.)

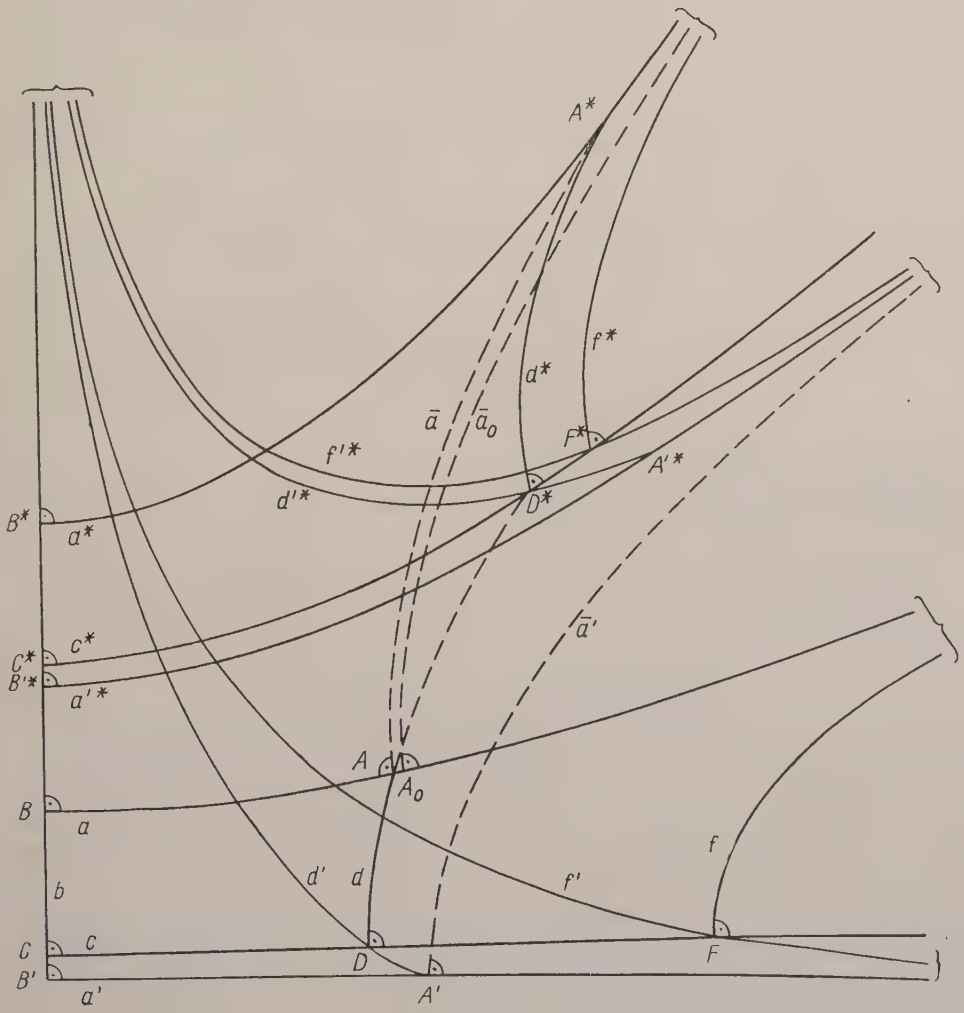


Abb. 21

Somit sind die Strecken $B'A'$ und BA tatsächlich kongruent, wie wir zeigen wollten, womit Satz (2) bewiesen ist.

Aus diesem Satz werden wir schon die übrigen „trigonometrischen Sätze" erhalten, die wir benötigen, und zwar mit Hilfe einiger Sätze über die „komplementären Figuren" aus Liebmann [8] § 10, die jetzt zitiert werden sollen.

LIEBMANN bezeichnet die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks (und ihre Längen) mit a und b, die Hypotenuse mit c und die a und b gegenüberliegenden Winkel (und ihre Größen) mit λ bzw. μ. Griechische Buchstaben bedeuten durchweg die Parallelwinkel zu den Strecken, die mit den entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet werden, und umgekehrt. Komplemente von Strecken werden durch Anhängen eines Striches bezeichnet. Dann beweist LIEBMANN den Satz:

Sind a, b, c, λ, μ die fünf Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen Dreiecks, dann gibt es ein Spitzeck mit den Seiten c, m', a, l, in dem die Seiten c und l den Winkel β einschließen.

Das rechtwinklige Dreieck kann man so in das „zugeordnete" Spitzeck legen, wie es Abb. 22 zeigt (dort ist noch die Paralleldistanz m zu μ, deren Komplement die

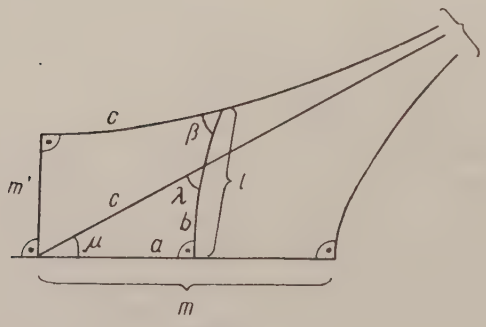


Abb. 22

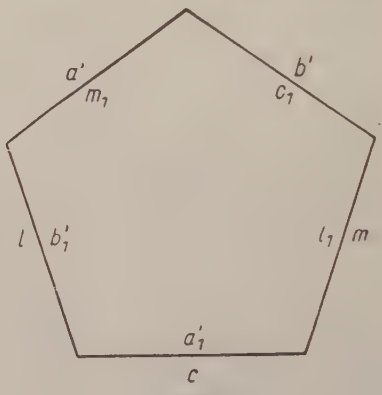


Abb. 23

Spitzeckseite m' ist, eingezeichnet). Indem man die Rollen der Spitzeckseiten vertauscht, kann man ein vorgegebenes Spitzeck aus zwei verschiedenen (i. a. nicht kongruenten) rechtwinkligen Dreiecken erhalten und damit verschiedene rechtwinklige Dreiecke einander zuordnen, woraus LIEBMANN den folgenden Satz über die ENGELsche *Dreieckskette* erhält:

Schreibt man (s. Abb. 23) *an die Seiten eines Fünfecks der Reihe nach a', l, c, m, b' und außerdem — im gleichen oder entgegengesetzten Umlaufssinn, an derselben Seite oder an einer anderen beginnend — a'_1, l_1, c_1, m_1, b'_1 und setzt die in diesem Schema jeweils an einer Seite stehenden Stücke einander gleich, so erhält man, wenn a', l, c, m, b' wie oben die Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen Dreiecks sind, mit a'_1, l_1, c_1, m_1, b'_1 ebenfalls Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen Dreiecks (mit den Katheten a_1, b_1, der Hypotenuse c_1 und den Winkeln λ_1, μ_1).*

Die zitierten Sätze und die bei LIEBMANN angegebenen Beweise überschreiten den Rahmen unseres Formalismus, da in ihnen Längen von Strecken und Größen von Winkeln vorkommen. Statt jedoch Längen von Strecken und Größen von

Winkeln zu addieren und zu subtrahieren, wie es bei LIEBMANN geschieht, kann man die Strecken und Winkel selbst aneinander und ineinander legen und so entsprechende Sätze (wenn auch etwas umständlicher) innerhalb der EHG formulieren und beweisen. Von dem ersten zitierten Satz brauchen wir im folgenden nur die Behauptung, daß für ein Spitzeck und ein wie in Abb. 22 darin eingebettetes rechtwinkliges Dreieck die Hypotenuse des letzteren kongruent zu der zu ihr paral-

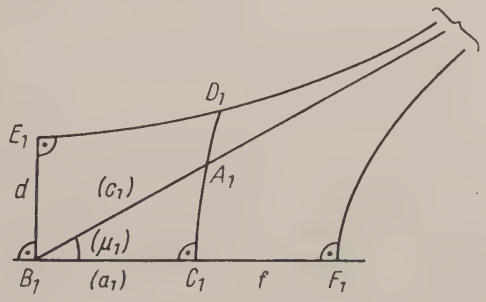


Abb. 24

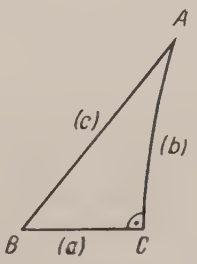


Abb. 25

lelen Spitzeckseite ist. Ein entsprechender beweisbarer Ausdruck der EHG (vgl. Abb. 24, die Bezeichnungen sind schon in Hinblick auf die folgende Anwendung gewählt) ist

$$\begin{aligned} &Eb D_1 E_1 B_1 C_1 \wedge RwD_1E_1B_1 \wedge RwE_1B_1C_1 \wedge RwB_1C_1D_1 \\ &\wedge GrC_1D_1A_1 \wedge B_1A_1 \,||\, E_1D_1 \rightarrow B_1A_1 \underset{s}{\equiv} E_1D_1. \end{aligned} \tag{I}$$

Von dem Satz über die ENGELsche Dreieckskette brauchen wir gerade den in Abb. 23 dargestellten Fall, und zwar nur für die Stücke a', b', c. Ein entsprechender beweisbarer Ausdruck der EHG (vgl. Abb. 24 und 25, die LIEBMANNschen Bezeichnungen sind in Klammern eingetragen) ist

$$\begin{aligned} RwACB \rightarrow \exists A_1 \exists B_1 \exists C_1 \exists B' \exists C' (&RwA_1C_1B_1 \wedge B'C'CpBC \\ &\wedge A_1B_1C_1\, PwB'C' \wedge A_1B_1CpAC \wedge B_1C_1\, CpAB). \end{aligned} \tag{II}$$

Mit Hilfe der Sätze (I) und (II) erhalten wir aus Satz (2) den

Satz (2′): $Ar_{oe} \wedge RwACB \rightarrow \big(e - th^2(A, C)\big) \cdot \big(e - th^2(B, C)\big) = e - th^2(A, B)$.

(Bestimmen o und e ein Zahlenbüschel, so ist das Produkt der Funktionswerte der Funktion $e - th^2$ für die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks gleich dem Wert dieser Funktion für die Hypotenuse des Dreiecks. Diese Funktion bedeutet im KLEINschen Kugelmodell $\mathfrak{K}_R$ natürlich das reziproke Quadrat des hyperbolischen Cosinus der Länge der betreffenden Dreiecksseiten.)

Sei nämlich die Voraussetzung erfüllt, und seien A_1, B_1, C_1, B', C' gemäß Satz (II) gewählt (vgl. Abb. 24 und 25). Sei f die Gerade durch B_1 und C_1 und d das Lot

in der Ebene durch A_1, B_1, C_1 auf f in B_1. Seien F_1 und E_1 die Fußpunkte der Lote von dem durch den Halbstrahl B_1A_1 bestimmten Ende auf f bzw. auf d, und sei D_1 der Schnittpunkt des letzten Lotes mit der Geraden durch C_1 und A_1. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes (1) erfüllt, und mithin ist $B_1A_1 \underset{s}{\equiv} E_1D_1$. Nach unserer Konstruktion ist $A_1B_1C_1$ auch Parallelwinkel zu B_1F_1 und damit $B_1F_1 \underset{s}{\equiv} B'C'$. Außerdem ist B_1F_1 komplementär zu B_1E_1 und damit $B_1E_1 \underset{s}{\equiv} BC$. Nach Satz (2) ist

$$th(E_1, D_1) = th(B_1, C_1) \cdot \frac{e}{\sqrt{e - th^2(B_1, E_1)}},$$

also auch

$$th^2(E_1, D_1) \cdot (e - th^2(B_1, E_1)) = th^2(B_1, C_1).$$

Auf Grund der angegebenen Kongruenzen ist aber $th(E_1, D_1) = th(A_1, B_1)$ und $th(B_1, E_1) = th(B, C)$. Nach Satz (1) ist, da A_1B_1 komplementär zu AC und B_1C_1 komplementär zu AB ist, außerdem $th^2(E_1, D_1) = th^2(A_1, B_1) = e - th^2(A, C)$ und $th^2(B_1, C_1) = e - th^2(A, B)$. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Aus den Sätzen (2) und (2′) erhalten wir noch den

Satz (3): $Ar_{oe} \wedge EbABCD \wedge RwABC \wedge RwBCD \wedge RwCDA$

$$\rightarrow th^2(C, A) = th^2(C, B) + th^2(C, D).$$

(Seien o und e die Bezugsgeraden eines Zahlenbüschels. Dann ist das Quadrat des [darauf bezogenen] Abstandstangens derjenigen Diagonale eines Spitzecks, die durch den Scheitel des spitzen Winkels geht, gleich der Quadratsumme der Abstandstangenten der nicht an dem spitzen Winkel liegenden Seiten. Vgl. Abb. 26.)

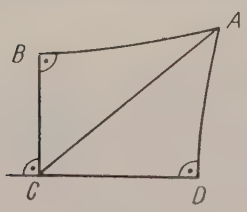


Abb. 26

Sei nämlich die Voraussetzung erfüllt. Nach Satz (2) ist dann

$$th^2(B, A) = \frac{th^2(C, D)}{e - th^2(C, B)},$$

nach Satz (2′) außerdem

$$e - th^2(C, A) = (e - th^2(C, B)) \cdot (e - th^2(B, A)),$$

also

$$e - th^2(C, A) = (e - th^2(C, B)) \cdot \frac{e - th^2(C, B) - th^2(C, D)}{e - th^2(C, B)}$$

$$= e - th^2(C, B) - th^2(C, D)$$

und damit

$$th^2(C, A) = th^2(C, B) + th^2(C, D),$$

wie behauptet.

Neben diesen „trigonometrischen“ Sätzen brauchen wir noch das folgende „Additions- und Subtraktionstheorem“ für den Abstandstangens.

Satz (4): (a) $Ar_{oe} \wedge ZwABC \rightarrow th(A,C) = \dfrac{th(A,B) + th(B,C)}{e + th(A,B) \cdot th(B,C)}$.

(b) $Ar_{oe} \wedge ZwACB \rightarrow th(A,C) = \dfrac{th(A,B) - th(B,C)}{e - th(A,B) \cdot th(B,C)}$.

(Wenn die Strecke AC durch Aneinanderlegen von AB und BC entsteht, so gilt für den Abstandstangens [in bezug auf ein gewisses Zahlenbüschel] die oben unter (a) angegebene Behauptung. Entsteht die Strecke AC dagegen aus der Strecke AB dadurch, daß man die [kleinere] Strecke BC von B aus nach innen abträgt, so gilt für den Abstandstangens die oben unter (b) angegebene Behauptung.)

Aus der (a) entsprechenden Formel für den Tangens hyperbolicus der Summe reeller Zahlen erhält man die (b) entsprechende Formel für den Tangens hyperbolicus der Differenz reeller Zahlen schon daraus, daß der Tangens hyperbolicus eine ungerade Funktion ist. Hier haben wir dagegen (a) und (b) als Sätze zu formulieren, da unser Abstandstangens nicht für „negative Argumente" erklärt ist. Jedoch sind auch hier die Sätze (a) und (b) gleichwertig. Die Behauptung in (b) ist nämlich gleichwertig mit den folgenden:

$$th(A,C) \cdot (e - th(A,B) \cdot th(B,C)) = th(A,B) - th(B,C),$$

$$th(A,C) - th(A,B) + th(B,C) = th(A,C) \cdot th(A,B) \cdot th(B,C),$$

$$th(A,B) \cdot (e + th(A,C) \cdot th(B,C)) = th(A,C) + th(B,C),$$

$$th(A,B) = \frac{th(A,C) + th(B,C)}{e + th(A,C) \cdot th(B,C)}.$$

Letzteres ist aber mit der Prämisse $Ar_{oe} \wedge ZwACB$ gerade Satz (a), nur mit anderen Bezeichnungen. Es genügt also, Satz (b) zu beweisen, was wir jetzt tun wollen.

Sei die Voraussetzung von (b) erfüllt. Zur Abkürzung setzen wir $th(A,C) = c$, $th(A,B) = b$, $-th(B,C) = a$ und haben dann $c = \dfrac{b+a}{e+ba}$, d. h. $a + b - c = a \cdot b \cdot c$ nachzuweisen (vgl. Abb. 27). Seien e' und E wie üblich konstruiert (S. 161), und seien A', B', C' die Schnittpunkte von e' mit a, b bzw. c. Nach Wahl von b und c ist dann $EB' \underset{s}{\equiv} AB$, $EC' \underset{s}{\equiv} AC$ und $ZwEC'B'$ und damit auch $C'B' \underset{s}{\equiv} CB$, nach Wahl von a außerdem $ZwC'EA'$ und $EA' \underset{s}{\equiv} CB$ und damit $EA' \underset{s}{\equiv} C'B'$. Sei g_1 die Verbindungsgerade der nicht auf o liegenden Enden von a und b. Da a und b auf verschiedenen Seiten von o liegen, schneiden sich o und g_1 in einem gewissen Punkte F. Sei A^* der Fußpunkt des Lots von dem a und g_1 gemeinsamen Ende auf e' und B^* der Fußpunkt des Lots von dem b und g_1 gemeinsamen Ende auf e'. Dann liegen E und A^* spiegelbildlich zu A' und E und B^* spiegelbildlich zu B'. Somit ist $A^*A' \underset{s}{\equiv} A'E \underset{s}{\equiv} C'B'$ und damit $A^*C' \underset{s}{\equiv} A'B'$, andererseits $A'C' \underset{s}{\equiv} EB' \underset{s}{\equiv} B'B^*$ und damit $A'B' \underset{s}{\equiv} C'B^*$. Also ist $A^*C' \underset{s}{\equiv} C'B^*$, d. h., A^* und B^* liegen spiegelbildlich zu C'. Folglich steht das Lot l in der durch o und e bestimmten Ebene auf e' in C' senkrecht auf g_1.

Weiter setzen wir zur Abkürzung $a + b - c = d$ und haben dann $d = a \cdot b \cdot c$ oder auch $d \cdot \frac{e}{c} = a \cdot b$ nachzuweisen. Es ist $a + b = c + d$, nach dem Satz S. 178 liegen also sowohl a und b als auch c und d spiegelbildlich zu der Geraden s des Zahlenbüschels, zu welcher o und die (in Abb. 27 nicht eingezeichnete) Summe $a + b = c + d$ spiegelbildlich liegen. Da a und b spiegelbildlich zu s liegen, steht s senkrecht auf g_1. Sei c^* das Spiegelbild von c an e'. Dann liegen die (in Abb. 27

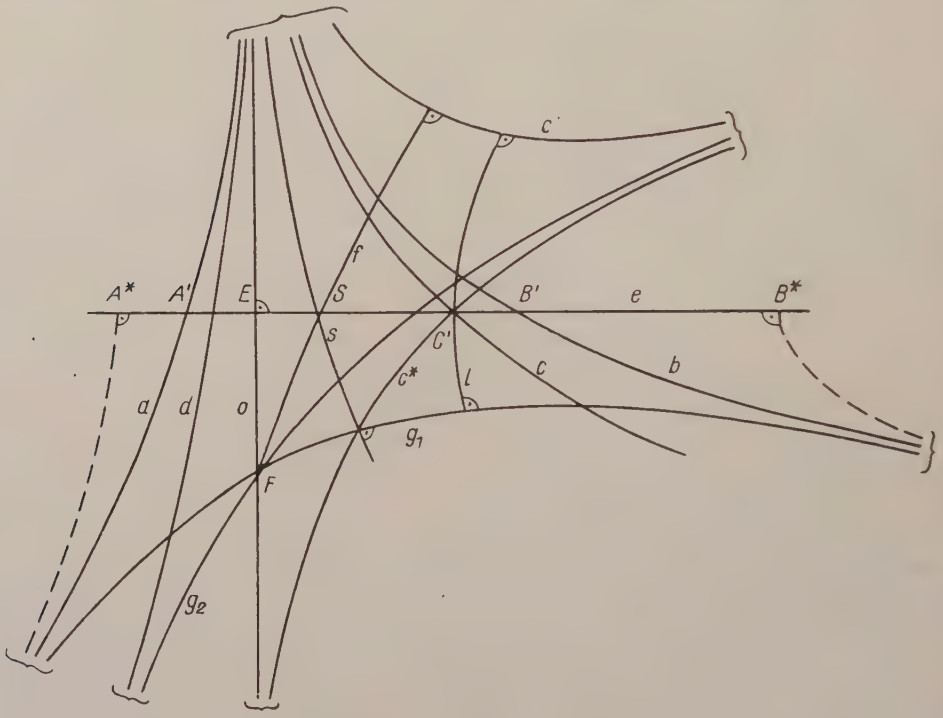


Abb. 27

nicht eingezeichneten) Lote von den nicht auf o liegenden Enden von c bzw. c^* spiegelbildlich zu e' und die Fußpunkte dieser Lote spiegelbildlich zu E. Für die Gerade c' des Zahlenbüschels durch das nicht auf o liegende Ende von c^* gilt nach Definition der geometrischen Multiplikation also $c' \cdot c = e$, d. h., es ist $c' = \frac{e}{c}$. Da l in C' senkrecht auf e' steht, liegen c und c^* auch spiegelbildlich zu l, und l steht senkrecht auf c'. Sei S der Schnittpunkt von s und e'. Man überlegt sich leicht, daß S „zwischen" den Geraden c^* und c' (d. h. mit jedem Punkt von c^* auf derselben Seite von c' und mit jedem Punkt von c' auf derselben Seite von c^*) und ebenso zwischen den Geraden d und c' liegt. Da c und c^* spiegelbildlich zu e' liegen, hat S von c und c^* denselben Abstand; da d und c spiegelbildlich zu s liegen, hat S auch von d und c und damit von d und c^* denselben Abstand. Daraus ergibt sich,

daß die (zu den Enden von c' parallelen) Geraden d und c^* spiegelbildlich zum Lot f von S auf c' liegen. Wie wir nachträglich noch feststellen werden, geht f durch den Schnittpunkt F von o und g_1. Das Spiegelbild g_2 von o an f geht demnach durch F und verbindet diejenigen Enden von c' und d, die nicht beiden Geraden gemeinsam sind (da o die entsprechenden Enden von c' und c^* verbindet), das sind die nicht auf o liegenden Enden von c' und d. Die (in Abb. 27 nicht eingezeichneten) Fußpunkte der Lote von diesen Enden auf o liegen also spiegelbildlich zu F. Das gleiche gilt für die Fußpunkte der Lote auf o von den nicht auf o liegenden Enden der Geraden a und b, da diese Enden durch die Gerade g_1 (die durch F geht) verbunden werden. Da sich g_2 und o schneiden, haben außerdem c' und d verschiedene Vorzeichen (ebenso wie a und b). Nach Definition der Produktrelation (S. 163, s. auch die Bemerkung im Anschluß daran) ist also $d \cdot c' = a \cdot b$, d. h. $d \cdot \frac{e}{c} = a \cdot b$, wie zu zeigen war.

Es bleibt noch zu beweisen, daß das Lot f von S auf c' durch F geht oder, was dasselbe bedeutet, daß das Lot von F auf c' durch S geht. Letzteres ergibt sich aus dem bekannten Satz, daß sich die Höhen eines Dreiecks in einem Punkte schneiden, wenn sich nur zwei Höhen schneiden, — hier angewandt auf das „entartete Dreieck" mit den Seiten c', g_1, o und den Höhen f, s, e' —. Die „Ecken" dieses „Dreiecks" sind nämlich der „Feldpunkt" F, der o, c' und s gemeinsame „Randpunkt" und der c', g_1 und e' gemeinsame „Überpunkt" im Sinne von Liebmann [8]. In unserem Formalismus läßt sich der hier gebrauchte Spezialfall des Höhenschnittpunktsatzes folgendermaßen ausdrücken:

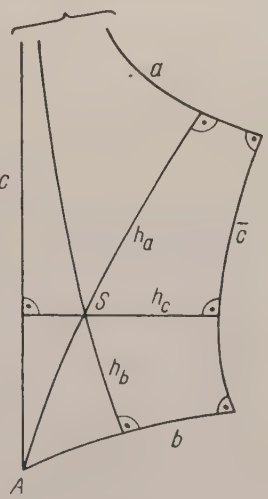


Abb. 28

$$Inz\,F\,g_1 \wedge Inz\,F\,o \wedge Inz\,F\,f \wedge End\,o\,c'\,s \wedge c' \perp l \wedge g_1 \perp l \wedge e' \perp l$$
$$\wedge f \perp c' \wedge s \perp g_1 \wedge e' \perp o \wedge s\,e'\,Schn\,S \rightarrow Inz\,S\,f$$

oder, mit den für Dreiecke üblichen Bezeichnungen (vgl. Abb. 28):

$$Inz\,A\,b \wedge Inz\,A\,c \wedge Inz\,A\,h_a \wedge End\,c\,a\,h_b \wedge a \perp \bar{c} \wedge b \perp \bar{c}$$
$$\wedge\, h_c \perp \bar{c} \wedge h_a \perp a \wedge h_b \perp b \wedge h_c \perp c \wedge h_b\,h_c\,Schn\,S \rightarrow Inz\,S\,h_a.$$

Dieser Fall läßt sich ähnlich beweisen wie der bei Liebmann [8] S. 31 behandelte Fall des Höhenschnittpunktsatzes, was hier nicht näher ausgeführt werden soll.

Damit wäre Satz (4) bewiesen.

Den angestrebten Satz S. 182 werden wir mit Hilfe der Sätze (2), (3), (4) beweisen. Zuvor sei noch bemerkt, daß sich umgekehrt diese Sätze, ebenso wie Satz (2′), sofort aus jenem Satz ergeben, daß wir also mit diesen Sätzen lediglich Spezialfälle des zu beweisenden Satzes bewiesen haben.

Sei nämlich die Voraussetzung von Satz (2) (S. 185) erfüllt. Wir führen dann ein Koordinatensystem mit dem Ursprung $O = C$ ein, in dem D auf der ersten und B

auf der zweiten positiven Koordinaten-Halbachse liegt, wir setzen also etwa $O_1 = D$, $O_2 = B$ und wählen O_3 so, daß O, O_1, O_2, O_3 ein Koordinatentetraeder bilden. Sind a', a'', a''' die Koordinatengeraden von A in bezug auf O, O_1, O_2, O_3 (und das vorgegebene Zahlenbüschel) und b', b'', b''' die Koordinatengeraden von B, so ist auf Grund der Definition der Koordinaten und des Abstandstangens offenbar $a' = th(C, D)$, $b' = o$, $a'' = b'' = th(C, B)$, $a''' = b''' = o$. Nach dem Satz S. 182 ist also

$$e - th^2(A, B) = \frac{(e - (a'^2 + a''^2))(e - b''^2)}{(e - a''b'')^2}$$

$$= \frac{e - (a'^2 + a''^2)}{e - a''^2},$$

$$th^2(A, B) = e - \frac{e - (a'^2 + a''^2)}{e - a''^2}$$

$$= \frac{a'^2}{e - a''^2}$$

$$= \frac{th^2(C, D)}{e - th^2(C, B)},$$

also

$$th(A, B) = \frac{th(C, D)}{\sqrt{e - th^2(C, B)}},$$

wie in Satz (2) behauptet.

Sei die Voraussetzung von Satz (2′) (S. 193) erfüllt. Wir setzen $O = C$, $O_1 = A$, $O_2 = B$ und wählen wieder O_3 so, daß O, O_1, O_2, O_3 ein Koordinatentetraeder bilden. Für die darauf bezogenen Koordinaten a', a'', a''' von A und b', b'', b''' von B gilt $a' = th(A, C)$, $b'' = th(B, C)$, $a'' = b' = a''' = b''' = o$, nach dem Satz S. 182 ist also

$$e - th^2(A, B) = (e - a'^2) \cdot (e - b'^2)$$

$$= (e - th^2(A, C)) \cdot (e - th^2(B, C)),$$

wie in Satz (2′) behauptet.

Sei die Voraussetzung von Satz (3) (S. 194) erfüllt (das ist dieselbe wie bei Satz (2)). Wir verwenden das gleiche Koordinatentetraeder wie bei der Behandlung von Satz (2) und betrachten außer den Koordinaten von A noch die von C, die sämtlich gleich o sind. Nach dem Satz S. 182 ist dann

$$e - th^2(A, C) = e - (a'^2 + a''^2),$$

also

$$th^2(A, C) = a'^2 + a''^2$$

$$= th^2(C, D) + th^2(C, B),$$

wie in Satz (3) behauptet. Aus Satz (3) kann man übrigens als eine Art „Grenzfall“ auch den Satz (1) erhalten.

Sei schließlich die Voraussetzung von Satz (4) (b) (S. 195) erfüllt. Hier setzen wir $O = B$, $O_1 = C$ und wählen O_2 und O_3 so, daß O, O_1, O_2, O_3 ein Koordinatentetraeder bilden. Für die darauf bezogenen Koordinaten a', a'', a''' von A und c', c'', c''' von C gilt $a' = th(A, B)$, $c' = th(B, C)$, $a'' = c'' = a''' = c''' = o$. Nach dem Satz S. 182 ist somit

$$e - th^2(A, C) = \frac{(e - a'^2)(e - c'^2)}{(e - a'c')^2},$$

$$th^2(A, C) = \frac{(e - a'c')^2 - (e - a'^2)(e - c'^2)}{(e - a'c')^2}$$

$$= \frac{(a' - c')^2}{(e - a'c')^2},$$

wegen $c' < a'$ und $a'c' < e$ also

$$th(A, C) = \frac{a' - c'}{e - a'c'}$$

$$= \frac{th(A, B) - th(B, C)}{e - th(A, B) \cdot th(B, C)},$$

wie in Satz (4) (b) behauptet. Den mit (4) (b) äquivalenten Satz (4) (a) kann man auf ähnliche Weise auch direkt aus dem Satz S. 182 erhalten.

Da man aus Satz (2′) mit Hilfe des Satzes über die Engelsche Dreieckskette auch die übrigen trigonometrischen Formeln für das rechtwinklige Dreieck erhalten kann (wenn man die darin auftretenden Funktionen von Strecken durch den Abstandstangens und die Winkelfunktionen durch den Abstandstangens der Paralleldistanz ausdrückt und Satz (1) anwendet), ergibt sich übrigens aus dem Satz S. 182 praktisch die ganze hyperbolische Trigonometrie.

Zum Beweis dieses Satzes wollen wir jetzt untersuchen, wie sich die Koordinaten eines Punktes bei gewissen einfachen Bewegungen des Koordinatensystems, nämlich Verschiebungen längs einer Achse, ändern.

Wir legen unseren Betrachtungen ein festes Zahlenbüschel mit den Bezugsgeraden o und e zugrunde und gehen aus von zwei Koordinatensystemen mit den Bezugspunkten O, O_1, O_2, O_3 einerseits und O', O_1', O_2', O_3' andererseits, von denen das zweite aus dem ersten durch eine Verschiebung längs einer Achse dieses Systems, es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die erste Achse g_1, hervorgeht, d. h., daß O', O_1' auf g_1 liegen und auf dieser Geraden dieselbe Orientierung besitzen wie O und O_1, daß O_2 und O_2' in einer von g_1 begrenzten Halbebene liegen und ebenso O_3 und O_3' in einer von g_1 begrenzten Halbebene liegen. Die erste Koordinate von O' im ersten System sei o_1 (durch o_1 ist die Lage beider Systeme zueinander völlig festgelegt, die anderen Koordinaten von O' sind gleich o). Aus o_1 und den Koordinaten b_1, b_2, b_3 eines beliebigen Punktes B im ersten System wollen wir die Koordinaten b_1', b_2', b_3' von B im zweiten System berechnen.

In dem trivialen Falle $O' = O$ (d. h. $o_1 = o$) erhalten wir sofort $b_\nu' = b_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$). Daher wollen wir im folgenden $O' \neq O$ annehmen.

Seien B_1, B_2, B_3 die Punkte, in denen die Lotebenen von B auf die Achsen des ersten Systems diese Achsen schneiden, und B_1', B_2', B_3' die entsprechenden Punkte für das zweite System (vgl. Abb. 29, wo die Ebene durch die ersten beiden Achsen dargestellt ist). Da die ersten Achsen in beiden Systemen zusammenfallen, ist $B_1' = B_1$. Offenbar ist $o_1 = \pm th(O, O')$, wobei das obere Vorzeichen gilt, wenn o_1 positiv ist, und das untere, wenn o_1 negativ ist. Ebenso ist $b_1 = \pm th(O, B_1)$ und $b_1' = \pm th(O', B_1)$, wobei wieder das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem, ob b_1 bzw. b_1' positiv oder negativ ist (falls die betreffende Gerade gleich o ist, sind beide Vorzeichen richtig).

Zur Berechnung von b_1' nehmen wir zunächst $B_1 \neq O$ und $B_1 \neq O'$ (d. h. $b_1 \neq o$ und $b_1' \neq o$) an. Nach Satz (4) (S. 195) ist

$$th(O', B_1) = \begin{cases} \dfrac{th(O, B_1) - th(O, O')}{e - th(O, B_1) \cdot th(O, O')}, & \text{falls } \; Zw\,O\,O'\,B_1 \quad \text{(a)}, \\ -\dfrac{th(O, B_1) - th(O, O')}{e - th(O, B_1) \cdot th(O, O')}, & \text{falls } \; Zw\,O\,B_1\,O' \quad \text{(b)}, \\ \dfrac{th(O, B_1) + th(O, O')}{e + th(O, B_1) \cdot th(O, O')}, & \text{falls } \; Zw\,O'\,O\,B_1 \quad \text{(c)}. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet Fall (a), daß o_1 und b_1' dasselbe Vorzeichen haben wie b_1. Fall (b) bedeutet, daß o_1 dasselbe Vorzeichen wie b_1 und b_1' entgegengesetztes Vorzeichen hat. Schließlich bedeutet Fall (c), daß b_1' dasselbe Vorzeichen wie b_1 und o_1 entgegengesetztes Vorzeichen hat. Ist also b_1 positiv, so ergibt sich in allen drei Fällen

$$b_1' = \frac{b_1 - o_1}{e - b_1 o_1}. \qquad (*)$$

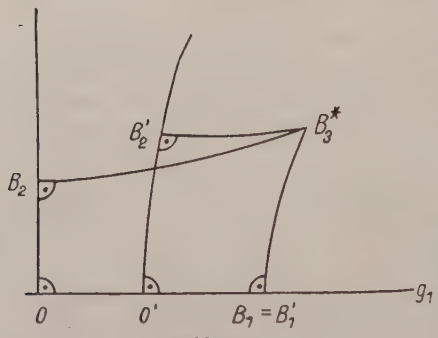


Abb. 29

Ist dagegen b_1 negativ, so erhalten auch o und b_1' die zu den vorherigen entgegengesetzten Vorzeichen, so daß sich (nach Umkehrung der Vorzeichen auf beiden Seiten) dieselbe Beziehung ergibt.

Ist ferner $B_1 = O'$, so ist $b_1 = o_1$ und $b_1' = o$; ist $B_1 = O$, so ist $b_1 = o$ und $b_1' = -o_1$. Damit gilt Formel (*) sogar für einen beliebigen Punkt B.

Sei B_3^* der Fußpunkt des Lots von B auf die Ebene durch die ersten und zweiten Achsen unserer Koordinatensysteme.

Zur Berechnung von b_2' nehmen wir zunächst an, das B_3^* nicht auf g_1 liegt. Dann liegen B_2 und B_2' auf derselben Seite von g_1, d. h., b_2 und b_2' sind von o verschieden und haben dasselbe Vorzeichen. Nach unserer Konstruktion ist $b_2 = \pm th(O, B_2)$, $b_2' = \pm th(O', B_2')$, wobei die Vorzeichen wie bei b_1 und b_1' bestimmt sind. Ist nun B_1 von O verschieden, so ist nach Satz (2) (S. 185)

$$th^2(B_1, B_3^*) = \frac{th^2(O, B_2)}{e - th^2(O, B_1)}.$$

Fällt dagegen B_1 mit O zusammen, so ergibt sich dieselbe Beziehung einfach daraus, daß dann auch B_3^* mit B_2 zusammenfällt. Ebenso ergibt sich

$$th^2(B_1, B_3^*) = \frac{th^2(O', B_2')}{e - th^2(O', B_1)}$$

Damit ist

$$\frac{th^2(O, B_2)}{e - th^2(O, B_1)} = \frac{th^2(O', B_2')}{e - th^2(O', B_1)},$$

d. h.

$$\frac{b_2^2}{e - b_1^2} = \frac{b_2'^2}{e - b_1'^2},$$

$$b_2'^2 = b_2^2 \cdot \frac{e - b_1'^2}{e - b_1^2}.$$

Nach Formel (*) ist

$$e - b_1'^2 = \frac{(e - b_1 o_1)^2 - (b_1 - o_1)^2}{(e - b_1 o_1)^2}$$

$$= \frac{(e - b_1^2)(e - o_1^2)}{(e - b_1 o_1)^2}$$

und damit

$$b_2'^2 = b_2^2 \cdot \frac{e - o_1^2}{(e - b_1 o_1)^2},$$

also, da b_2 und b_2' dasselbe Vorzeichen besitzen,

$$b_2' = b_2 \cdot \frac{\sqrt{e - o_1^2}}{e - b_1 o_1}. \qquad (**)$$

Liegt nun B_3^* auf g_1, so ist $b_2 = o$ und $b_2' = o$. Damit gilt Formel (**) für einen beliebigen Punkt B.

Da sich in unserer Konstruktion die zweiten und die dritten Koordinatenachsen gleichwertig verhalten, besteht eine entsprechende Beziehung auch für die dritten Koordinaten eines beliebigen Punktes B.

Insgesamt erhalten wir also für die betrachtete Koordinatentransformation:

$$b_1' = \frac{b_1 - o_1}{e - b_1 o_1}, \qquad b_2' = b_2 \cdot \frac{\sqrt{e - o_1^2}}{e - b_1 o_1}, \qquad b_3' = b_3 \cdot \frac{\sqrt{e - o_1^2}}{e - b_1 o_1}.$$

Diese Transformationsformeln wurden unter der Voraussetzung $O' \neq O$ bewiesen. Für $O' = O$ wird aber $o_1 = o$, und die Formeln liefern das schon vorweggenommene Ergebnis $b_1' = b_1$, $b_2' = b_2$, $b_3' = b_3$. Also gelten sie ohne Einschränkung.

Wir wollen diese Formeln benutzen, um festzustellen, daß die in dem Satz S. 182 auftretende Funktion gegenüber den betrachteten Koordinatentransformationen invariant ist. In Analogie zur Vektorschreibweise in der analytischen Geometrie bezeichnen wir dabei Tripel von Geradenvariablen mit kleinen deutschen Buchstaben und verwenden die Abkürzung $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ („das innere Produkt von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$“)

für den Term $b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3$, wobei $\mathfrak{b} = [b_1, b_2, b_3]$ und $\mathfrak{c} = [c_1, c_2, c_3]$ ist. Für $B Kg^{oe}_{O O_1 O_2 O_3}\, b_1 b_2 b_3$ schreiben wir entsprechend $B Kg^{oe}_{O O_1 O_2 O_3}\, \mathfrak{b}$ („B besitzt den Koordinatenvektor $\mathfrak{b}$“), für $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}$ schreiben wir auch $\mathfrak{b}^2$.

Für beliebige Punkte B und C seien in den beiden eben betrachteten Koordinatensystemen b_1, b_2, b_3 bzw. b_1', b_2', b_3' die Koordinaten von B, c_1, c_2, c_3 bzw. c_1', c_2', c_3' die Koordinaten von C. Zur Abkürzung setzen wir $\mathfrak{b} = [b_1, b_2, b_3]$, $\mathfrak{b}' = [b_1', b_2', b_3']$, $\mathfrak{c} = [c_1, c_2, c_3]$, $\mathfrak{c}' = [c_1', c_2', c_3']$. Dann gelten für $\mathfrak{b}'$ die obigen Transformationsformeln und für $\mathfrak{c}'$ entsprechend

$$c_1' = \frac{c_1 - o_1}{e - c_1 o_1}, \qquad c_2' = c_2 \cdot \frac{\sqrt{e - o_1^2}}{e - c_1 o_1}, \qquad c_3' = c_3 \cdot \frac{\sqrt{e - o_1^2}}{e - c_1 o_1}.$$

Also ist

$$\mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{c}' = \frac{(b_1 - o_1)(c_1 - o_1) + b_2 c_2 (e - o_1^2) + b_3 c_3 (e - o_1^2)}{(e - b_1 o_1)(e - c_1 o_1)},$$

$$e - \mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{c}' = \frac{(e - b_1 o_1)(e - c_1 o_1) - (b_1 - o_1)(c_1 - o_1) - (b_2 c_2 + b_3 c_3)(e - o_1^2)}{(e - b_1 o_1)(e - c_1 o_1)}$$

$$= \frac{(e - b_1 c_1)(e - o_1^2) - (b_2 c_2 + b_3 c_3)(e - o_1^2)}{(e - b_1 o_1)(e - c_1 o_1)}$$

$$= (e - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) \cdot \frac{e - o_1^2}{(e - b_1 o_1)(e - c_1 o_1)}.$$

Da diese Beziehung für beliebige Punkte B und C gilt, gilt sie, wenn B und C beliebig gegeben sind, insbesondere für B und B und für C und C, d. h., es ist auch

$$e - \mathfrak{b}'^2 = (e - \mathfrak{b}^2) \cdot \frac{e - o_1^2}{(e - b_1 o_1)^2},$$

$$e - \mathfrak{c}'^2 = (e - \mathfrak{c}^2) \cdot \frac{e - o_1^2}{(e - c_1 o_1)^2}.$$

Somit ist

$$\frac{(e - \mathfrak{b}'^2)(e - \mathfrak{c}'^2)}{(e - \mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{c}')^2} = \frac{(e - \mathfrak{b}^2)(e - \mathfrak{c}^2)}{(e - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})^2}.$$

Es ist also $\dfrac{(e - \mathfrak{b}^2)(e - \mathfrak{c}^2)}{(e - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})^2}$ — für feste Punkte B und C als Funktion des Koordinatensystems aufgefaßt — eine Invariante gegenüber Verschiebungen des Koordinatensystems längs der ersten Achse. Dasselbe gilt natürlich auch für Verschiebungen längs der zweiten und längs der dritten Achse, da bei der Einführung der Koordinaten in unseren Definitionen keine Achse vor der anderen ausgezeichnet wurde.

Der zu beweisende Satz S. 182 läßt sich mit den zuletzt eingeführten Bezeichnungen auf die folgende Form bringen:

$$B Kg^{oe}_{O O_1 O_2 O_3}\, \mathfrak{b} \wedge C Kg^{oe}_{O O_1 O_2 O_3}\, \mathfrak{c} \to e - th^2(B, C) = \frac{(e - \mathfrak{b}^2)(e - \mathfrak{c}^2)}{(e - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})^2}.$$

Es genügt nun, diesen Satz unter der zusätzlichen Voraussetzung zu beweisen, daß der Koordinatenursprung mit C zusammenfällt. Sei nämlich die Voraussetzung erfüllt, und seien B und C beliebig zum Koordinatensystem gelegen. Durch Ver-

schiebung des Systems längs der dritten Achse läßt sich ein neues Koordinatensystem konstruieren, in dem die dritte Koordinate von C gleich o ist. Durch Verschiebung dieses Systems längs der zweiten Achse läßt sich ein Koordinatensystem finden, in dem die zweite Koordinate von C gleich o ist; die dritte Koordinate von C bleibt dabei ungeändert gleich o. Durch Verschiebung des letzten Systems längs der ersten Achse gelangt man schließlich zu einem Koordinatensystem, in dem auch die erste Koordinate von C gleich o ist. Damit sind in diesem System alle Koordinaten c_1', c_2', c_3' von C gleich o, d. h., der Ursprung O' fällt mit C zusammen. Für die Koordinatenvektoren $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ von B und C in diesem System gilt wegen der oben festgestellten Invarianz bei den einzelnen Verschiebungen

$$\frac{(e-\mathfrak{b}'^2)(e-\mathfrak{c}'^2)}{(e-\mathfrak{b}'\cdot\mathfrak{c}')^2}=\frac{(e-\mathfrak{b}^2)(e-\mathfrak{c}^2)}{(e-\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})^2}.$$

Also genügt es tatsächlich zu zeigen, daß $e-th^2(B,C)=\dfrac{(e-\mathfrak{b}'^2)(e-\mathfrak{c}'^2)}{(e-\mathfrak{b}'\cdot\mathfrak{c}')^2}$ ist.

Nach Konstruktion ist $\mathfrak{c}'^2=\mathfrak{b}'\cdot\mathfrak{c}'=o$, wir haben also $e-th^2(B,C)=e-\mathfrak{b}'^2$, d. h.

$$th^2(B,C)=\mathfrak{b}'^2,$$

nachzuweisen, was sich leicht aus Satz (3) (S. 194) ergibt.

Seien nämlich O', O_1', O_2', O_3' die Bezugspunkte des zuletzt betrachteten Koordinatensystems, g_1', g_2', g_3' seine Achsen, β_1, β_2, β_3 die Lotebenen von B auf die Achsen und B_1, B_2, B_3 deren Schnittpunkte mit den Achsen (vgl. Abb. 30). Sei weiter α die Ebene durch g_1' und g_2' und B_3^* der Fußpunkt des Lots von B auf α. Nach Sätzen der absoluten Geometrie liegt dieses Lot in β_1 und in β_2, also ist B_3^* der Schnittpunkt der Lote in α auf g_1' bzw. g_2' in B_1 bzw. B_2, außerdem liegen B_3 und B auf einer zu g_3' senkrechten Geraden. Falls B_1 und B_2 von C verschieden sind, bilden B_3^*, B_1, C, B_2 ein Spitzeck mit dem spitzen Winkel bei B_3^*, nach Satz (3) ist also

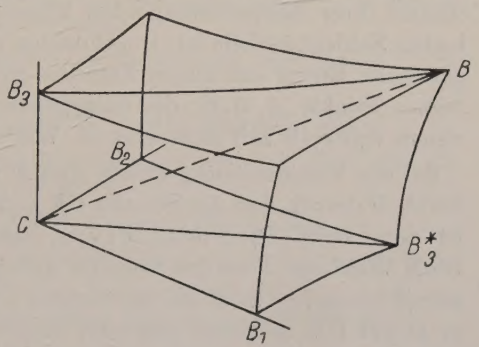


Abb. 30

$$th^2(C,B_3^*)=th^2(C,B_1)+th^2(C,B_2).$$

Falls B_1 oder B_2 gleich C ist, gilt dieselbe Beziehung, da dann $B_3^*=B_2$ oder $B_3^*=B_1$ ist. Falls B_3^* und B_3 von C verschieden sind, bilden B, B_3^*, C, B_3 ein Spitzeck mit dem spitzen Winkel bei B, und nach Satz (3) ist

$$th^2(C,B)=th^2(C,B_3^*)+th^2(C,B_3),$$

andernfalls gilt dieselbe Beziehung, da dann B mit B_3 bzw. mit B_3^* zusammenfällt. Damit ist

$$th^2(C,B)=th^2(C,B_1)+th^2(C,B_2)+th^2(C,B_3).$$

Für die Koordinaten b_1', b_2', b_3' von B in unserem System ist aber $b_\nu' = \pm th(C, B_\nu)$ und damit $b_\nu'^2 = th^2(C, B_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3)$. Also ist

$$th^2(B, C) = th^2(C, B) = b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 = \mathfrak{b}'^2,$$

wie zu zeigen war.

Damit ist der Satz auf S. 182 und mithin auch der Satz 35. S. 172 bewiesen.

Im letzten Teil des eben geführten Beweises haben wir insbesondere gezeigt, daß die Quadratsumme der Koordinaten eines beliebigen Punktes B gleich dem Quadrat des Abstandstangens von B und dem Koordinatenursprung ist. Da der Abstandstangens für beliebige Punkte zwischen o (einschließlich) und e (ausschließlich) liegt, ist die Quadratsumme der Koordinaten eines beliebigen Punktes also stets kleiner als e, womit der Satz 36. S. 173 schon bewiesen ist (die anderen beiden Behauptungen dieses Satzes sind trivial).

Zum Beweis von Satz 37. (S. 173) beweisen wir den folgenden

Hilfssatz: $Ar_{oe} \wedge RwBCD \wedge th^2(C,B) + th^2(C,D) < e$

$$\rightarrow \exists A\,(Eb\,ABCD \wedge RwABC \wedge RwCDA).$$

(Wenn die Strecken CB und CD in C aufeinander senkrecht stehen und die Quadratsumme ihrer Abstandstangenten kleiner als die Einheitsgerade des zugrunde gelegten Zahlenbüschels ist, so schneiden sich die Geraden, die in der durch B, C, D gehenden Ebene auf diesen Strecken in B bzw. D senkrecht stehen, in einem gewissen Punkte A, d. h., die vorgegebene Figur läßt sich durch einen Punkt A zu einem Spitzeck mit dem spitzen Winkel bei A ergänzen.)

Sei die Voraussetzung erfüllt und F ein Punkt auf dem Halbstrahl von C aus durch D derart, daß die Strecke CF komplementär zu CB ist. Nach Satz (1) S. 184 ist dann $th^2(C,B) + th^2(C,F) = e$, also $th(C,D) < th(C,F)$ und damit $ZwCDF$. Nach Wahl von F ist das Lot in F auf der Strecke CF (in der betrachteten Ebene) parallel zum Lot in B auf der Strecke CB, das letztere Lot wird also von dem Lot in D auf CD in einem gewissen Punkte A geschnitten, wie zu zeigen war.

Sei nun die Voraussetzung von Satz 37. erfüllt; seien also O, O_1, O_2, O_3 die Punkte eines Koordinatentetraeders und b_1, b_2, b_3 irgendwelche Geraden des durch o und e bestimmten Zahlenbüschels, deren Quadratsumme kleiner als e ist. Dann ist insbesondere $b_\nu^2 < e$, also $-e < b_\nu < e$, d. h., b_ν schneidet die wie auf S. 161 zu o und e konstruierte Gerade e' $(\nu = 1, 2, 3)$. Sei nun (für $\nu = 1, 2, 3$) B_ν der (offensichtlich existierende) Punkt auf der ν-ten Koordinatenachse, dessen ν-te Koordinate b_ν ist (die anderen Koordinaten von B_ν sind dann gleich o) (vgl. Abb. 30, wobei $C = O$). Dann ist $b_\nu = \pm th(O, B_\nu)$ und damit $b_\nu^2 = th^2(O, B_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3)$. Auf Grund der Voraussetzung ist $b_1^2 + b_2^2 < e$, d. h., $th^2(O, B_1) + th^2(O, B_2) < e$. Es bezeichne nun α die Ebene durch die ersten beiden Koordinatenachsen. Dann schneiden sich die Lote in α auf diesen Achsen in B_1 bzw. B_2 in einem gewissen Punkte B_3^* (falls $B_1 = O$ oder $B_2 = O$ ist, leistet B_2 bzw. B_1 das Verlangte, sonst ist $Rw\,B_1OB_2$, und ein Schnittpunkt existiert nach obigem Hilfssatz). Wie

im Beweis auf S. 203 ist dann $th^2(O, B_3^*) = th^2(O, B_1) + th^2(O, B_2) = b_1^2 + b_2^2$, nach Voraussetzung also $th^2(O, B_3^*) + th^2(O, B_3) < e$. Sei α^* eine Ebene, in der B_3^* und die dritte Koordinatenachse liegen. Das Lot in α^* auf dieser Achse in B_3 und das Lot auf α in B_3^* schneiden sich in einem gewissen Punkte B, was sich wie oben ergibt. Nach Sätzen der absoluten Geometrie (vgl. S. 170f.) sind B_1, B_2, B_3 auch die Schnittpunkte der Lotebenen von B auf die Koordinatenachsen mit diesen Achsen. Die ν-te Koordinate von B stimmt somit mit der ν-ten Koordinate von B_ν überein, d. h., sie ist b_ν ($\nu = 1, 2, 3$). Also leistet B das in Satz 37. Verlangte.

Damit sind alle Sätze der hyperbolischen Geometrie, die wir zu unserem Vollständigkeitsbeweis brauchten, bewiesen.

Literatur

[1] E. Artin/O. Schreier, Algebraische Konstruktion reeller Körper. Abh. Math. Sem. Hamburg **5**, S. 83—115 (1926).

[2] G. Asser, Eine semantische Charakterisierung der deduktiv abgeschlossenen Mengen des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. Diese Zeitschr. **1**, S. 3—28 (1955).

[3] R. Baldus/F. Löbell, Nichteuklidische Geometrie. 3. Aufl. Berlin 1953.

[4] Н. В. Ефимов, Высшая геометрия. (N. W. Efimow, Höhere Geometrie). 3. Aufl. Moskau 1953. (Deutsche Übersetzung, Berlin, in Vorbereitung.)

[5] L. Heffter, Grundlagen und analytischer Aufbau der Projektiven, Euklidischen, Nichteuklidischen Geometrie. 2. Aufl. Leipzig 1950.

[6] D. Hilbert/P. Bernays, Grundlagen der Geometrie. 8. Aufl. Stuttgart 1956.

[7] D. Hilbert, Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie. Math. Ann. **57**, S. 137—150 (1903) (abgedruckt als Anhang III in [6]).

[8] H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie. 3. Aufl. Berlin u. Leipzig 1923.

[9] A. Schmidt, Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen. Math. Ann. **115**, S. 485—506 (1938).

[10] K. Schröter, Theorie des bestimmten Artikels. Diese Zeitschr. **2**, S. 37—56 (1956).

[11] K. Schröter, Theorie des logischen Schließens I. Diese Zeitschr. **1**, S. 37—86 (1955).

[12] K. Schröter, desgl. II. Ebenda **4**, S. 10—65 (1958).

[13] W. Schwabhäuser, Über die Vollständigkeit der elementaren euklidischen Geometrie. Diese Zeitschr. **2**, S. 137—165 (1956).

[14] A. Tarski, A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry. 2. Aufl. Berkeley u. Los Angeles 1951.

[15] A. Tarski, Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia philosophica **1**, S. 261—405 (1936).

[16] A. Tarski/A. Mostowski/R. M. Robinson, Undecidable Theories. Amsterdam 1953.

[17] B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, Bd. 1., 3. Aufl. Berlin, Göttingen u. Heidelberg 1950.

(Eingegangen am 19. Januar 1959)